Lisans Yerleştirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 18 Haziran 2011

Matematik Soruları ve Çözümleri

1. $\dfrac{3}{0,2} - (0,25)^{-2}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\dfrac{-2}{5}$ B) $\dfrac{3}{10}$ C) $\dfrac{1}{15}$ D) – 1 E) – 3

Çözüm 1

$$\frac{3}{0,2} - (0,25)^{-2} = \frac{3}{\frac{2}{10}} - \left(\frac{25}{100}\right)^{-2}$$

$$= \frac{30}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$= 15 - (4^{-1})^{-2}$$

$$= 15 - (4^{(-1).(-2)})$$

$$= 15 - 4^{2}$$

$$= 15 - 16$$

$$= -1$$

2. $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

Çözüm 2

I. Yol

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$

A) $x = \frac{1}{2}$ için : $x^2 = \frac{1}{4}$

B) $x = \frac{3}{2}$ için : $x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow 2 < \frac{9}{4} < 3$

C) $x = \frac{4}{3}$ için : $x^2 = \frac{16}{9}$

D) $x = \frac{7}{4}$ için : $x^2 = \frac{49}{16}$

E) $x = \frac{6}{5}$ için : $x^2 = \frac{36}{25}$

II. Yol

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

2 sayısının karekökünü yaklaşık olarak hesaplayalım.

2 den küçük en büyük tam kare 1,

2 den büyük en küçük tam kare 4 olduğundan, $a = 1$ ve $b = 4$ dır.

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \dfrac{2-1}{4-1} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ olarak bulunuyor.

3 sayısının karekökünü yaklaşık olarak hesaplayalım.

3 den küçük en büyük tam kare 1,

3 den büyük en küçük tam kare 4 olduğundan, $a = 1$ ve $b = 4$ dır.

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \dfrac{3-1}{4-1} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$ olarak bulunuyor.

$\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow$ 2 ile genişletilirse

$\dfrac{8}{6} < x < \dfrac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{9}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{2}$ elde edilir.

Not :

Bir x pozitif tam sayısının karekökü yaklaşık olarak aşağıdaki yöntemle bulunuyor :

• x sayısından küçük en büyük tam kareyle x sayısından büyük en küçük tam kare bulunuyor. Bu sayılardan ilki a, ikincisi b olarak adlandırılıyor.

• x sayısının karekökü $\sqrt{x} \approx \sqrt{a} + \dfrac{x-a}{b-a}$ formülüyle bulunuyor.

3. $t^3 - 2 = 0$ olduğuna göre, $\dfrac{1}{t^2 + t + 1}$ ifadesinin t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $t + 1$ B) $t - 2$ C) $t - 1$ D) $t^2 + 1$ E) $t^2 + 3$

Çözüm 3

$t^3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^3 - 1 = 1$

$t^3 - 1 = (t - 1).(t^2 + t + 1)$ olduğuna göre, $t^2 + t + 1 = \dfrac{t^3 - 1}{t - 1}$

$$\frac{1}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{\dfrac{t^3 - 1}{t - 1}} = \frac{t - 1}{t^3 - 1}$$

$t^3 - 1 = 1$ olduğuna göre, $\dfrac{t - 1}{1} = t - 1$ bulunur.

4. a ve b sayılarının geometrik ortalaması 3, aritmetik ortalaması ise 6 'dır.
Buna göre, a^2 ve b^2 sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

A) 67 B) 65 C) 63 D) 61 E) 57

Çözüm 4

a ve b sayılarının geometrik ortalaması = $\sqrt{a.b} = 3 \quad \Rightarrow \quad a.b = 9$

a ve b sayılarının aritmetik ortalaması = $\dfrac{a + b}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad a + b = 12$

$(a + b)^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2.a.b + b^2 = 144$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 144 - 18$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 126$

a^2 ve b^2 sayılarının aritmetik ortalaması = $\dfrac{a^2 + b^2}{2} = \dfrac{126}{2} = 63$ elde edilir.

5. $x - 2y = 3$ olduğuna göre,

$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y + x - 3$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 15

Çözüm 5

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y + x - 3 = x^2 - 4xy + 4y^2 + x - 2y - 3$$

$$= (x - 2y)^2 + x - 2y - 3$$

$x - 2y = 3$ olduğuna göre,

$$= 3^2 + 3 - 3$$

$$= 9$$

6. x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$$x^3 - 3x^2y = 3$$
$$y^3 - 3xy^2 = 11$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $x - y$ farkı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) – 2 E) – 3

Çözüm 6

$$x^3 - 3x^2y = 3$$

$y^3 - 3xy^2 = 11$ taraf tarafa çıkartılırsa

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3 - 11$$

$$(x - y)^3 = -8$$

$$(x - y)^3 = (-2)^3$$

$x - y = -2$ bulunur.

7. İki basamaklı a ve b pozitif tam sayıları için

$$\frac{a!}{b!} = 132$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm 7

$$\frac{a!}{b!} = 132 \quad \Rightarrow \quad \frac{a!}{b!} = 12.11 \quad \Rightarrow \quad a! = 12.11.b!.$$

$$\Rightarrow \quad b! = 10! \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

$$\Rightarrow \quad a! = 12! \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

Buna göre , $a + b = 12 + 10 = 22$ elde edilir.

8. $$\frac{a^4 - a^3}{a^4 + a^2} . \frac{a^2 + 1}{a^2 - a}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a - 1$ B) a C) 1 D) $a + 1$ E) $a^2 + 1$

Çözüm 8

$$\frac{a^4 - a^3}{a^4 + a^2} . \frac{a^2 + 1}{a^2 - a} = \frac{a^3.(a-1)}{a^2.(a^2+1)} . \frac{a^2 + 1}{a.(a-1)} = 1$$

9. $\dfrac{2(x-y)}{x-y-1}+\dfrac{x-y-1}{x-y-2}=3$ olduğuna göre, $x-y$ farkı kaçtır?

A) $\dfrac{-1}{2}$ B) $\dfrac{-2}{3}$ C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{5}{4}$

Çözüm 9

$\dfrac{2(x-y)}{x-y-1}+\dfrac{x-y-1}{x-y-2}=3 \quad \Rightarrow \quad x-y=t$ olsun.

$$\frac{2.t}{t-1}+\frac{t-1}{t-2}=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2.t}{\underset{t-2}{t-1}}+\frac{t-1}{\underset{t-1}{t-2}}=3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2.t.(t-2)+(t-1).(t-1)}{(t-1).(t-2)}=3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2t^2-4t+t^2-2t+1}{t^2-3t+2}=3$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3t^2-6t+1}{t^2-3t+2}=3$ içler – dışlar çarpımı yapılırsa

$$\Rightarrow \quad 3t^2-6t+1=3t^2-9t+6$$

$$\Rightarrow \quad 3t=5$$

$$\Rightarrow \quad t=\frac{5}{3}$$

$x-y=t$ olduğuna göre, $x-y=\dfrac{5}{3}$ olur.

10. $A = \{n \in Z^+ \mid n \leq 100 \text{ ; n, 3'e tam bölünür.}\}$

$B = \{n \in Z^+ \mid n \leq 100 \text{ ; n, 5'e tam bölünür.}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, A \ B fark kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 33 B) 32 C) 30 D) 28 E) 27

Çözüm 10

$s(A \setminus B) = s(A) - s(A \cap B)$

A için

3'ün katı olan her sayı 3'e kalansız bölünür.

101 den küçük olan ve 3'ün katı olan kaç tane sayı olduğunu bulmak için
101 sayısı 3'e bölünür ve bölüm alınır.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \cline{2-2} & 33 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Buna göre, 33 tane sayı 3 ile tam bölünür. $\Rightarrow$ $s(A) = 33$

$A \cap B$ için

Hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilen sayılar, okek(3 , 5) = 15 ile de tam bölünür.

101 sayısı 15'e bölünür ve bölüm alınır.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 15 \\ \cline{2-2} & 6 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Buna göre, 6 tane sayı 15 ile tam bölünür. $\Rightarrow$ $s(A \cap B) = 6$

$s(A \setminus B) = s(A) - s(A \cap B)$

$= 33 - 6$

$= 27$ bulunur.

11. p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere

a = $p^4.q^2$

b = $p^2.q^3$

veriliyor.

Buna göre, a ve b sayılarının en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p^5.q^4$ B) $p^4.q^3$ C) $p^3.q^4$ D) $p^2.q^2$ E) $p^2.q^3$

Çözüm 11

Obeb(a , b) = $p^2.q^2$

Not : Ortak bölenlerin en büyüğü (obeb)

Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.

Ortak asal çarpanların en küçük üslüleri (üsler eşitse biri) alınır ve çarpılır.

12. $2^x \equiv 1 \pmod 7$

$3^y \equiv 4 \pmod 7$

denkliklerini sağlayan en küçük x ve en küçük y pozitif tam sayıları için $y - x$ farkı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm 12

$2^x \equiv 1 \pmod 7$

$x = 3$ için : $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$

$3^y \equiv 4 \pmod 7$

$y = 4$ için : $3^4 = 81 \equiv 4 \pmod 7$

Buna göre, $y - x = 4 - 3 = 1$ olur.

13. $x.(3-x) > 0$

$(2x+1).(x-2) < 0$

Yukarıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (a , b) açık aralığı olduğuna göre,

a – b farkı kaçtır?

A) – 2 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm 13

	$-\frac{1}{2}$	0	2	3	
x	− − −	− − 0	+ + +	+ +	+ + +
3 - x	+ + +	+ +	+ + +	+ + 0	− − −
x.(3 - x)	− − −	− − 0	+ + +	+ + 0	− − −
2x + 1	− − −	0 + +	+ + +	+ +	+ + +
x - 2	− − −	− −	− − − 0	+ +	+ + +
(2x + 1).(x - 2)	+ + +	0 − −	− − − 0	+ +	+ + +

Çözüm kümesi = (0 , 2) = (a , b)

Buna göre, a – b = 0 – 2 = – 2 bulunur.

14. A = {a , b , c , d , e} kümesi üzerinde Δ işlemi aşağıdaki tabloyla tanımlanıyor.

Örneğin ; a Δ d = c ve d Δ a = a ’dır.

Δ	a	b	c	d	e
a	a	b	a	c	d
b	c	b	b	a	e
c	a	b	c	d	e
d	a	a	d	d	b
e	e	e	e	d	a

Bu tabloya göre A kümesinin

K = {b , c , d}

L = {a , b , c}

M = {c , d , e}

alt kümelerinden hangileri Δ işlemine göre kapalıdır?

A) Yalnız K B) Yalnız L C) K ve L D) K ve M E) L ve M

Çözüm 14

K = {b , c , d} için

b Δ d = a ∉ K olduğundan Δ işlemine göre kapalı değildir.

L = {a , b , c} için

Δ	a	b	c
a	a	b	a
b	c	b	b
c	a	b	c

∀ a , b , c ∈ L olduğundan Δ işlemine göre kapalıdır.

M = {c , d , e} için

d Δ e = b ∉ M olduğundan Δ işlemine göre kapalı değildir.

Not : Bir Kümenin Bir İşleme Göre Kapalılığı

A üzerinde bir "Δ" işlemi verildiğinde

$\forall$ x , y $\in$ A için x Δ y $\in$ A oluyorsa A kümesi "Δ" işlemine göre kapalıdır denir.

15. x bir gerçel sayı ve $|x| \leq 4$ olmak üzere,

$$2x + 3y = 1$$

eşitliğini sağlayan y tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm 15

$|x| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq x \leq 4$

$2x + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad 3y = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1-2x}{3}$

$-4 \leq x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad (-2).(-4) \geq -2x \geq 4.(-2) \quad \Rightarrow \quad 8 \geq -2x \geq -8$

$1 + 8 \geq 1 - 2x \geq -8 + 1 \quad \Rightarrow \quad 9 \geq 1 - 2x \geq -7$

$\frac{9}{3} \geq \frac{1-2x}{3} \geq \frac{-7}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \geq \frac{1-2x}{3} \geq \frac{-7}{3}$

$\Rightarrow \quad 3 \geq y \geq \frac{-7}{3}$

y tam sayı değerleri = {– 2 , – 1 , 0 , 1 , 2 , 3}

y tam sayı değerleri toplamı = 3 olur.

16. Gerçel katsayılı P(x), Q(x) ve R(x) polinomları veriliyor.

Sabit terimi sıfırdan farklı P(x) polinomu için

$$P(x) = Q(x).R(x + 1)$$

eşitliği sağlanıyor.

P'nin sabit terimi Q'nun sabit teriminin iki katı olduğuna göre,

R'nin katsayılarının toplamı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) 2

Çözüm 16

P(x) polinomunun sabit terimi : $P(0) \neq 0$

$P(x) = Q(x).R(x + 1) \Rightarrow P(0) = Q(0).R(0 + 1)$

$\Rightarrow P(0) = Q(0).R(1)$

Q(x) polinomunun sabit terimi : Q(0)

$P(0) = 2.Q(0)$

R(x) polinomunun katsayılarının toplamı : R(1)

$P(0) = Q(0).R(1)$ olduğundan,

$2.Q(0) = Q(0).R(1) \Rightarrow R(1) = 2$ elde edilir.

17. Baş katsayısı 1 olan, – i ve 2i karmaşık sayılarını kök kabul eden dördüncü dereceden gerçel katsayılı P(x) polinomu için P(0) kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm 17

$x_1 = -\mathrm{i}$

$x_2 = 2\mathrm{i}$

$P(x) = a.(x + i).(x - i).(x - 2i).(x + 2i) \quad \Rightarrow \quad a = 1$ olduğuna göre,

$P(x) = 1.(x + i).(x - i).(x - 2i).(x + 2i) \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x + i).(x - i).(x - 2i).(x + 2i)$

$\Rightarrow \quad P(x) = (x^2 - (i)^2).(x^2 - (2i)^2)$

$\Rightarrow \quad P(x) = (x^2 - i^2).(x^2 - 4i^2)$

$i^2 = -1$ olduğuna göre, $\Rightarrow \quad P(x) = (x^2 + 1).(x^2 + 4)$

$P(0) = (0 + 1).(0 + 4) \quad \Rightarrow \quad P(0) = 1.4 \quad \Rightarrow \quad P(0) = 4$ bulunur.

Not :

Gerçel katsayılı bir denklemin köklerinden birisi $z = a + bi$ ise

diğer kök bu kökün eşleniği olan $\bar{z} = a - bi$ dir.

18. $P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$ polinomunda x'li terimin katsayısı kaçtır?

A) 41 B) 39 C) 37 D) 35 E) 33

Çözüm 18

I. Yol

$P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$

$P(x) = (x+2)^2.(x+2)^2 + 3(x+1)(x+1)^2$

$P(x) = (x^2+4x+4).(x^2+4x+4) + 3(x+1).(x^2+2x+1)$

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^3 + 16x^2 + 16x + 4x^2 + 16x + 16 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3$

$P(x) = x^4 + 11x^3 + 33x^2 + 41x + 19$

$P(x)$ polinomunda x'li terimin katsayısı = 41 bulunur.

II. Yol

$P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$

Binom formülüne göre,

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}.x^4 + \binom{4}{1}.x^3.2 + \binom{4}{2}.x^2.2^2 + \binom{4}{3}.x.2^3 + \binom{4}{4}.2^4$$

x'li terimin katsayısı = $\binom{4}{3}.2^3 = 32$

Binom formülüne göre,

$$3.(x+1)^3 = 3.\binom{3}{0}.x^3 + 3.\binom{3}{1}.x^2.1 + 3.\binom{3}{2}.x.1^2 + 3.\binom{3}{3}.1^3$$

x'li terimin katsayısı = $3.\binom{3}{2}.1^2 = 9$

Buna göre, $P(x)$ polinomunda x'li terimin katsayısı = 32 + 9 = 41 bulunur.

19. 6 kız ve 7 erkek öğrencinin bulunduğu bir gruptan 2 temsilci seçiliyor.

Seçilen bu iki temsilciden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{2}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{9}{13}$

Çözüm 19

$$\text{İstenen olasılık} = \frac{\binom{6}{1}.\binom{7}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{6.7}{\frac{13!}{11!.2!}} = \frac{42}{\frac{13.12}{2}} = \frac{7}{13} \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Not : } \textit{İstenen olasılık} = \frac{istenen \ \sec im \ sayisi}{tüm \ \sec im \ sayisi}$$

20. $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ ve $w = c + di$ karmaşık sayıları için

$z + w$ toplamı ve $z.w$ çarpımı birer gerçel sayı olduğuna göre,

I. z ve w birbirinin eşleniğidir.

II. $z – w$ gerçeldir.

III. $z^2 + w^2$ gerçeldir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm 20

$z = a + bi$ $(b \neq 0)$

$w = c + di$

$z + w = (a + bi) + (c + di)$

$z + w = (a + c) + (b + d)i \in$ gerçel sayı ise

Gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$(b + d)i = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -d$

$z.w = (a + bi).(c + di)$

$z.w = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i \in$ gerçel sayı ise

Gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$(a.d + b.c)i = 0 \quad \Rightarrow \quad a.d + b.c = 0$

$b = -d$ olduğuna göre,

$a.d - d.c = 0 \quad \Rightarrow \quad d.(a - c) = 0 \quad (b \neq 0)$

$\Rightarrow \quad a = c$

$z = a + bi$ karmaşık sayısının eşleniği : $\bar{z} = a - bi = c + di = w$

$w = c + di$ karmaşık sayısının eşleniği : $\bar{w} = c - di = a + bi = z$

Buna göre, z ve w birbirinin eşleniğidir.

z ve w birbirinin eşleniği olduğuna göre,

$z - w = z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$

$= (a - a) + (b + b)i$

$= 2bi \notin$ gerçel sayı

Buna göre, z – w gerçel sayı değildir.

z ve w birbirinin eşleniği olduğuna göre,

$z = a + b i$

$w = a - b i$

$z^2 + w^2 = (a + b i)^2 + (a - b i)^2$

$= a^2 + 2ab i - b^2 + a^2 - 2ab i - b^2$

$= 2a^2 - 2b^2 \in$ gerçel sayı

Buna göre, $z^2 + w^2$ gerçeldir.

Not :

Karmaşık Sayıların Eşleniği

$z = a + b i$ karmaşık sayısı için $\bar{z} = a - b i$ sayısına z nin eşleniği denir.

Not :

$z = a + b i$ karmaşık sayısında,

a’ya z’nin gerçel (reel) kısmı, b’ye z’nin sanal (imajiner) kısmı denir ve

$\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$ olarak yazılır.

Not :

$z = a + b i$ sayısında $b = 0$ ise $z = a \in R$ dir.

Buna göre her gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayıdır.

Bu nedenle $R \subset C$ dir.

21. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde f fonksiyonu

$$f(z)=\sum_{k=0}^{101} z^k$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $f(i)$ değeri nedir?

A) $1+i$ B) $1-i$ C) i D) $-i$ E) 1

Çözüm 21

$$f(z)=\sum_{k=0}^{101} z^k = z^0+z^1+z^2+z^3+.........+z^{99}+z^{100}+z^{101}$$

$$=1+z+z^2+z^3+.........+z^{99}+z^{100}+z^{101}$$

$$=\frac{1-z^{102}}{1-z}$$

$$f(i)=\frac{1-i^{102}}{1-i}=\frac{1-(i^2)^{51}}{1-i}$$

$i^2=-1$ olduğundan,

$$=\frac{1-(-1)^{51}}{1-i}=\frac{1-(-1)}{1-i}=\frac{1+1}{1-i}=\frac{2}{1-i}$$ bulunur.

Paydanın eşleniği pay ve paydayla çarpılırsa,

$$\frac{2}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}=\frac{2.(1+i)}{1-i^2}$$

$$=\frac{2.(1+i)}{1-(-1)}$$

$$=\frac{2.(1+i)}{1+1}$$

$$=\frac{2.(1+i)}{2}=1+i$$ elde edilir.

Not :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad , \ \mathrm{x} \neq 1 \ , \ \mathrm{N}^+ \text{ için}$$

22. $\bar{z}$ ile z 'nin eşleniği gösterildiğine göre,

$z^2 = \bar{z}$ eşitliğini sağlayan ve argümenti $\frac{\pi}{2}$ ile π arasında olan sıfırdan farklı

z karmaşık sayısı nedir?

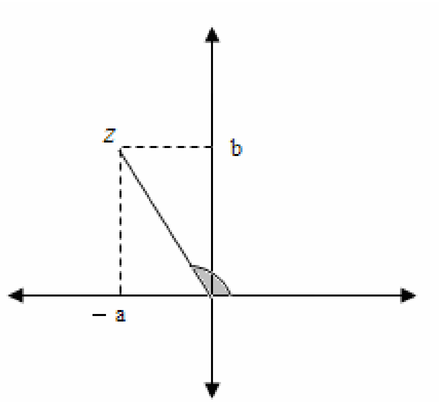
A) $\frac{-1}{2} + \left(\sqrt{3}\right).i$ B) $\frac{-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).i$ C) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right).i$

D) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).i$ E) $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right).i$

Çözüm 22

z karmaşık sayısının argümenti $\frac{\pi}{2}$ ile π arasında ise II. bölgededir.

$z = -a + bi$ olsun.



z nin eşleniği : $\bar{z} = -a - bi$

$z^2 = \bar{z}$

$(-a + bi)^2 = -a - bi$

$(-a)^2 - 2abi - b^2 = -a - bi$

$a^2 - b^2 - 2abi = -a - bi$

$-2abi = -bi \quad \Rightarrow \quad 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ bulunur.

$a^2 - b^2 = -a$ denkleminde a yerine $\frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{\underset{1}{4}} + \frac{1}{\underset{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ elde edilir.}$$

$z = -a + bi$ olduğuna göre, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ olur.

23. $2^{2x} - 2.2^{x} - 8 = 0$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) ln2 D) ln4 E) 2ln4

Çözüm 23

$2^{2x} - 2.2^{x} - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2^{x})^{2} - 2.2^{x} - 8 = 0$

$2^{x} = \text{A}$ olsun.

$\text{A}^2 - 2\text{A} - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{A} - 4).(\text{A} + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \text{A} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{A} = 4$

$\Rightarrow \quad \text{A} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{A} = -2$ olamaz

$\text{A} = 2^{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^{x} = 2^{2}$

Eşitlikte, tabanlar eşit olduğunda üslerde eşit olacağına göre, x = 2 olur.

24. $\log_9 (x^2 + 2x + 1) = t \quad (x > -1)$ olduğuna göre,

x'in t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3^{t} - 1$ B) 3^{t-1} C) $3 - 2^{t}$ D) $2 - 3^{t-1}$ E) $3^{t} - 2$

Çözüm 24

$\log_9 (x^2 + 2x + 1) = t \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 9^{t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^{2} = (3^{2})^{t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^{2} = 3^{2.t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^{2} = (3^{t})^{2}$

Eşitlikte, üsler eşit olduğunda tabanlarda eşit olacağına göre,

$x + 1 = 3^{t} \quad \Rightarrow \quad x = 3^{t} - 1$ olur.

25. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{3} + 2\right)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin(x) - 6$ B) $2\sin(x) + 3$ C) $3\sin(x) - 6$ D) $\sin(2x - 6)$ E) $\sin(2x) - 3$

Çözüm 25

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$$

$$y = \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\ y = \sin\ \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin y = \frac{x}{3} + 2$$

$$\Rightarrow \quad \sin y - 2 = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3\sin y - 6 = x$$

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\ (y) = f^{-1}\ f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

$$\Rightarrow \quad 3\sin y - 6 = f^{-1}(y)$$

f^{-1} ters fonksiyonu için değişken x ve x'in görüntüsü y ile gösterilirse,

$$\Rightarrow \quad 3\sin(x) - 6 = f^{-1}(x) \quad \text{elde edilir.}$$

26. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği a birim sağa ve b birim aşağı ötelenerek $g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, $|a| + |b|$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm 26

I. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x - 1)^2 + 2$

$g(x) = x^2 - 8x + 14 \quad \Rightarrow \quad g(x) = (x - 4)^2 - 2$

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde 1 birim ötelenirse,

$(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde 4 birim ötelenirse,

$(x - 4)^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Buna göre, a = 3 olur.

$(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenirse,

$(x - 1)^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$(x - 4)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin negatif yönünde $|-2|$ birim ötelenirse,

$(x - 4)^2 - 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Buna göre, b = 4 olur.

$|a| + |b| = 3 + 4 = 7$ elde edilir.

II. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği çizilirse,

Tepe noktası (r , k) olsun.

$r = -\frac{(-2)}{2.1} \quad \Rightarrow \quad r = 1$

$k = f(r) \quad \Rightarrow \quad k = f(1) = 1 - 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad k = 2$

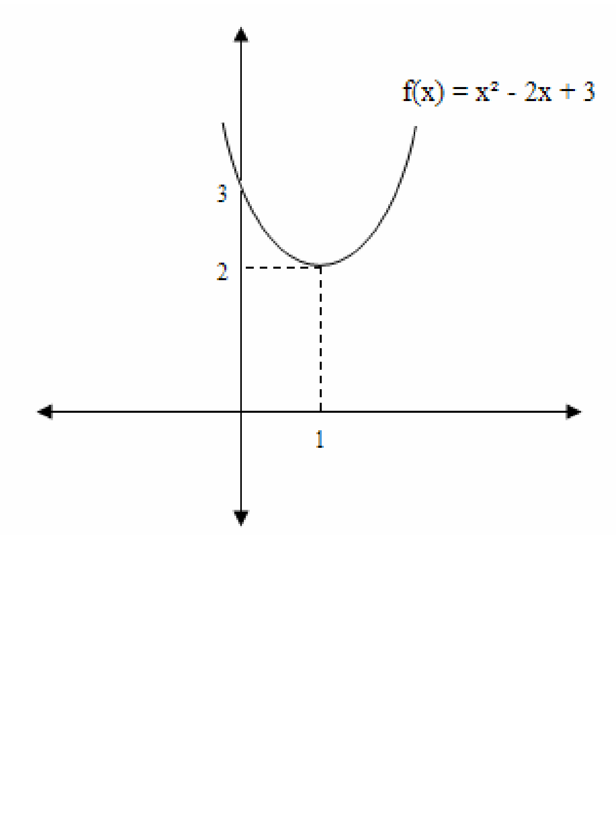
$(r , k) = (1 , 2)$

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için : $y = 3$

$y = 0$ için : $x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ gerçel kök yoktur.

Bu durumda eğri x eksenini kesmez.



$g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği çizilirse,

Tepe noktası (r , k) olsun.

$$r = -\frac{(-8)}{2.1} \quad \Rightarrow \quad r = 4$$

$$k = f(r) \quad \Rightarrow \quad k = f(4) = 4^2 - 8.4 + 14 \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

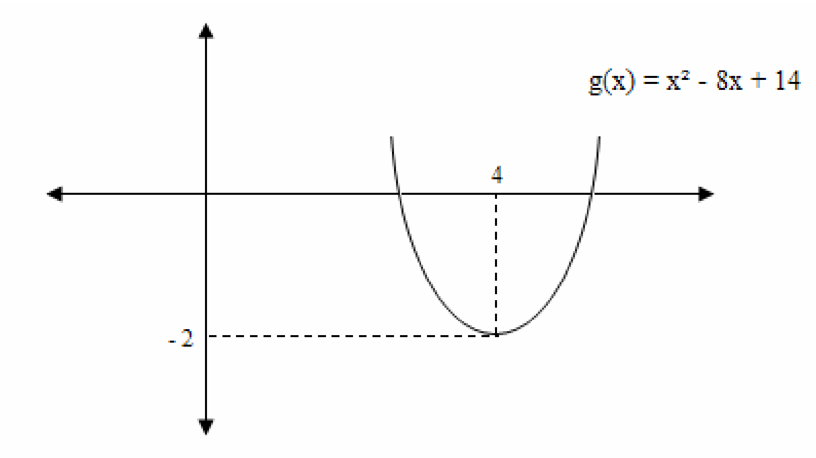
$(r , k) = (4 , -2)$

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

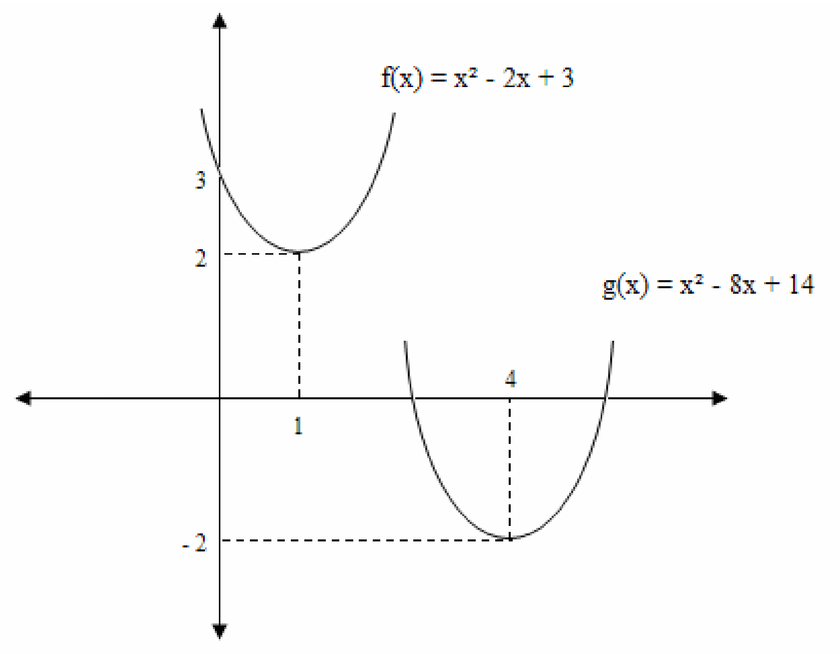
$x = 0$ için : $y = 14$

$y = 0$ için : $x^2 - 8x + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-8)^2 - 4.1.14 = 8 > 0$

Buna göre, x eksenini iki noktada keser.



Sonuç olarak



f(x) = x² – 2x + 3 fonksiyonunun grafiği 3 birim sağa ve 4 birim aşağı ötelenerek g(x) = x² – 8x + 14 fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, $|a| + |b| = 3 + 4 = 7$ elde edilir.

Not :

$f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun grafiğinin çizilmesi

– Tepe noktasının koordinatları bulunur.

– Eksenleri kestiği noktalar bulunur ve grafik çizilir.

Not :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki parabollerin

Tepe noktasının apsisi : $r = -\dfrac{b}{2a}$ dır.

Tepe noktasının ordinatı : $k = f(r)$ dir.

Not :

a , b , c birer reel (gerçel) sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

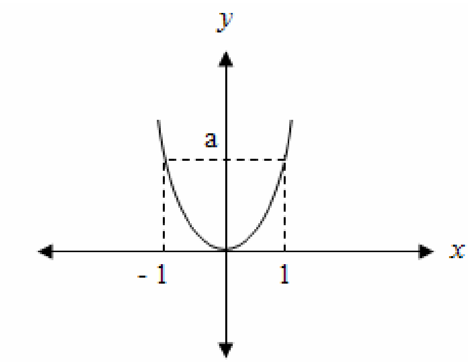
koşulu ile tanımlanan fonksiyonlara ikinci derece fonksiyonları denir.

I $- f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği

x	$-\infty$	- 1	0	1	$+\infty$
y		a	0	a	

i)



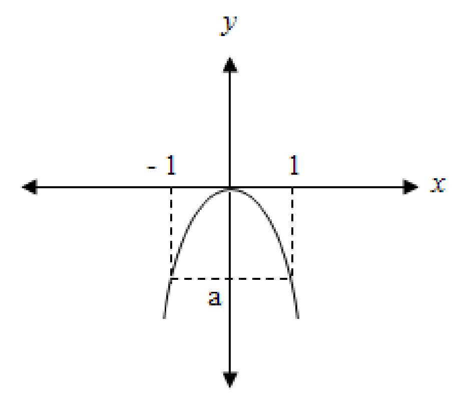
$a > 0$ ise

parabolün kolları y ekseninin pozitif yönündedir.

Fonksiyon en küçük değerini $x = 0$ da alır.

Fonksiyonun görüntü kümesi $f(R) = R^{+} \cup \{0\}$ dır.

ii)



$a < 0$ ise

parabolün kolları y ekseninin negatif yönündedir.

Fonksiyon en büyük değerini $x = 0$ da alır.

Fonksiyonun görüntü kümesi $f(R) = R^{-} \cup \{0\}$ dır.

$\text{II} - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = a.(x-r)^2$ fonksiyonunun grafiği

i) $r > 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde r birim ötelenir.

ii) $r < 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin negatif yönünde $|r|$ birim ötelenir.

$\text{III} - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a.(x-r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği

Önce $y = ax^2$ fonksiyonunu grafiği, sonra $y = a.(x-r)^2$ grafiği çizilir.

$y = a.(x-r)^2$ nin grafiği

i) $k > 0$ ise y ekseninin pozitif yönünde k birim kadar ötelenir.

ii) $k < 0$ ise y ekseninin negatif yönünde $|k|$ birim kadar ötelenir.

$\text{IV} - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği

Bu tür fonksiyonları $f(x) = a.(x-r)^2 + k$ biçimine getirerek grafiğini çizeriz.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

$r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ alınırsa, $f(x) = a.(x-r)^2 + k$ olur.

27. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\cot x - 3\tan x = \dfrac{1}{\sin 2x}$ olduğuna göre, $\sin^2 x$ kaçtır?

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{1}{7}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Çözüm 27

$$\cot x - 3\tan x = \frac{1}{\sin 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} - 3\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos x}{\underset{\cos x}{\sin x}} - \frac{3\sin x}{\underset{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x}{\sin x.\cos x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos x.\sin x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - 4\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2.\sin x.\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - 4\sin^2 x}{1} = \frac{1}{2}$$

İçler – dışlar çarpımı yapılırsa,

$2 - 8\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad 8\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \dfrac{1}{8}$ bulunur.

28. $\cos x = \dfrac{-4}{5}$ olduğuna göre, cos2x kaçtır?

A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{5}{13}$ C) $\dfrac{12}{13}$ D) $\dfrac{24}{25}$ E) $\dfrac{7}{25}$

Çözüm 28

$$\cos x = \frac{-4}{5}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

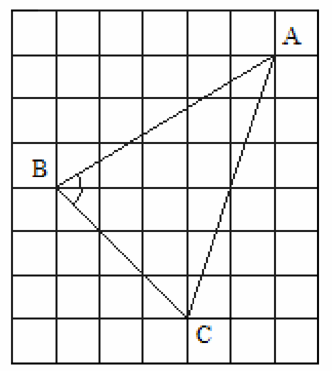
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ olduğuna göre,

$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 2.\cos^2 x - 1$ olur.

$\cos x = \dfrac{-4}{5}$ olduğuna göre,

$\cos 2x = 2.\left(\dfrac{-4}{5}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \dfrac{32}{25} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \dfrac{7}{25}$ elde edilir.

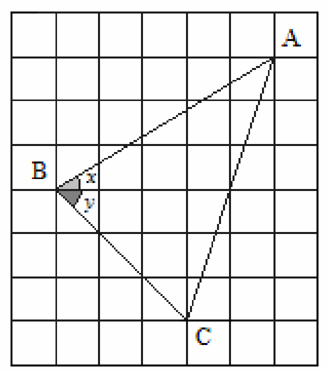
29.

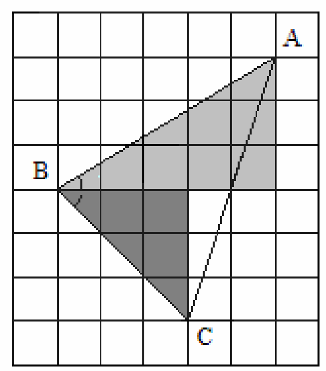


Birim kareler üzerine çizilmiş yukarıdaki ABC üçgeninin B açısının tanjantı kaçtır?

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{34}{5}$ C) $\frac{40}{9}$ D) 4 E) 5

Çözüm 29

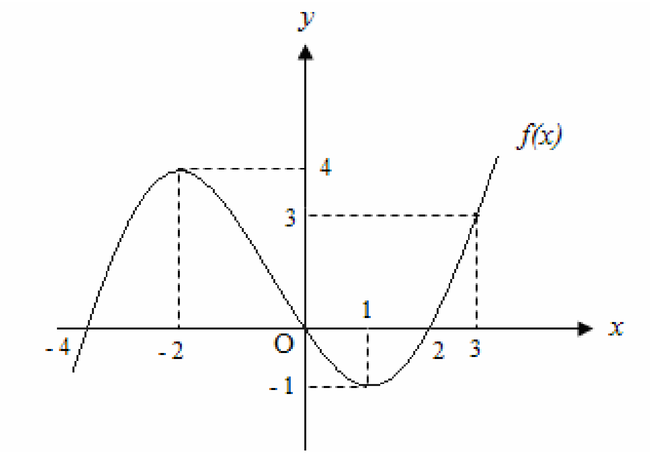




$$\tan B = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{3}}{1-\frac{3}{5}.\frac{3}{3}} = \frac{\frac{3}{5}+1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{5}.\frac{5}{2} = 4$$

30. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$g(x) = 3 - f(x-2)$ olduğuna göre, $g(-2) + g(5)$ toplamı kaçtır?

A) – 3 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm 30

$x = -2$ için :

$g(-2) = 3 - f(-2-2) \quad \Rightarrow \quad g(-2) = 3 - f(-4)$

Grafiğe göre, $f(-4) = 0$ olduğundan, $g(-2) = 3 - 0 \quad \Rightarrow \quad g(-2) = 3$

$x = 5$ için :

$g(5) = 3 - f(5-2) \quad \Rightarrow \quad g(5) = 3 - f(3)$

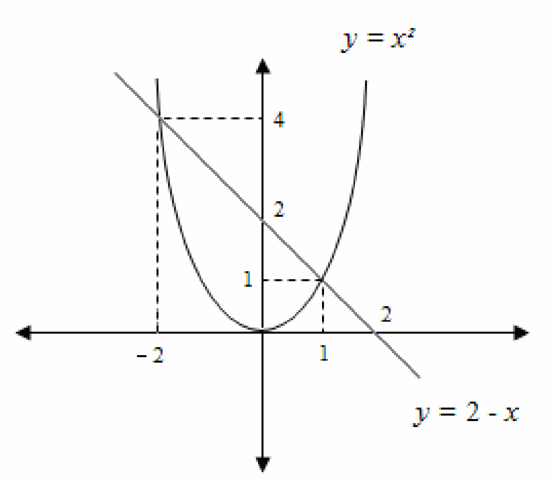
Grafiğe göre, $f(3) = 3$ olduğundan, $g(5) = 3 - 3 \quad \Rightarrow \quad g(5) = 0$

Buna göre, $g(-2) + g(5)$ = 3 + 0 = 3 olur.

31. $y = x^2$ parabolü ile $y = 2 – x$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin sınırları üzerindeki (x , y) noktaları için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 25 B) 20 C) 17 D) 13 E) 10

Çözüm 31



$y = x^2$ parabolü ile $y = 2 – x$ doğrusunun kesişim noktalarını bulalım.

$x^2 = 2 – x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x – 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 2).(x – 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = – 2$

$\Rightarrow \quad x – 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$x = – 2$ ise $y = (– 2)^2 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

$(x , y) = (– 2 , 4)$

$x = 1$ ise $y = 1^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$(x , y) = (1 , 1)$

$x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değer : $(– 2)^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

32. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ parçalı fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \text{ rasyonelse} \\ x^2, & x \text{ rasyonel değilse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $(fof)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3\sqrt{2} + 2$ B) $\sqrt{2} + 2$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{5}{2}$ E) $\dfrac{7}{2}$

Çözüm 32

$$(fof)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ rasyonel olmadığına göre, $f(x) = x^2$ biçiminde olur.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\dfrac{1}{2}$ rasyonel olduğuna göre, $f(x) = 3x + 1$ biçiminde olur.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3.\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$ bulunur.

33. f fonksiyonu $n \geq 1$ tam sayıları için $f(n) = 2.f(n-1) + 1$ eşitliğini sağlıyor.

$f(0) = 1$ olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm 33

$f(n) = 2.f(n-1) + 1$

$n = 2$ için : $f(2) = 2.f(2-1) + 1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2.f(1) + 1$

$n = 1$ için : $f(1) = 2.f(1-1) + 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2.f(0) + 1$

$f(0) = 1$ olduğuna göre,

$f(1) = 2.1 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 3$

$f(2) = 2.3 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 7$ bulunur.

34. (a_k) dizisi

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .\ .\ .\ )$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, a_8 terimi nedir?

A) 4 B) 7 C) 12 D) 15 E) 19

Çözüm 34

I. Yol

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .\ .\ .\ )$

$k = 1$ için : $a_2 = a_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 40 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 39$

$k = 2$ için : $a_3 = a_2 - 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 39 - 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 37$

$k = 3$ için : $a_4 = a_3 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 37 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 34$

$k = 4$ için : $a_5 = a_4 - 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 34 - 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 30$

$k = 5$ için : $a_6 = a_5 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 30 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 25$

$k = 6$ için : $a_7 = a_6 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 25 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 19$

$k = 7$ için : $a_8 = a_7 - 7 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 19 - 7 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 12$ elde edilir.

II. Yol

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .\ .\ .\ )$

$k = 1$ için : $a_2 = a_1 - 1$

$k = 2$ için : $a_3 = a_2 - 2$

$k = 3$ için : $a_4 = a_3 - 3$

$k = 4$ için : $a_5 = a_4 - 4$

$k = 5$ için : $a_6 = a_5 - 5$

$k = 6$ için : $a_7 = a_6 - 6$

$k = 7$ için : $a_8 = a_7 - 7$ taraf tarafa toplanırsa,

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 - 1 + a_2 - 2 + a_3 - 3 + a_4 - 4 + a_5 - 5 + a_6 - 6 + a_7 - 7$

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7$

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

$a_8 = a_1 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

$a_1 = 40$ olduğuna göre,

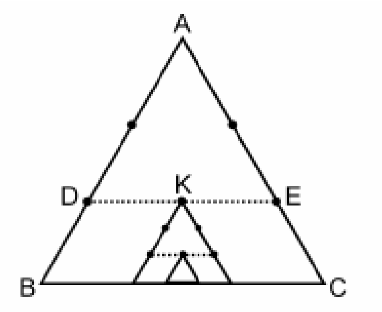
$a_8 = 40 - \frac{7.(7+1)}{2}$

$a_8 = 40 - 28$

$a_8 = 12$ elde edilir.

35. Bir kenar uzunluğu 1 birim olan ABC eşkenar üçgeninin AB ve AC kenarları üç eşit parçaya ayrılarak şekildeki gibi D ve E noktaları işaretleniyor.

DE doğru parçasının orta noktası K olmak üzere, bir köşesi K ve bu köşenin karşısındaki kenarı BC üzerinde olan yeni bir eşkenar üçgen çiziliyor ve aynı işlem çizilen yeni eşkenar üçgenlere de uygulanıyor.



Bu şekilde çizilecek iç içe geçmiş tüm üçgensel bölgelerin alanları toplamı kaç birim karedir?

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ D) $\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$ E) $\dfrac{9\sqrt{3}}{32}$

Çözüm 35

I. Yol

Bir kenar uzunluğu *a* birim olan eşkenar üçgenin alanı : $a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ise

$$(1)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{\frac{1}{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots\ldots$$

$$1.\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1}{9}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ olur.}$$

II. Yol

$$a_1 = (1)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{9} . \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$r = \dfrac{a_2}{a_1}$ olduğuna göre, $r = \dfrac{\frac{1}{9} . \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{1}{9}$

Toplam alan $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} . \left(1 + \dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{1}{9}\right)^2 + ...\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} . \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ olur.}$$

Not : Geometrik Dizi

Ardışık iki terimin oranı aynı olan dizilere geometrik dizi denir.

$r \in$ R olmak üzere her n $\in$ N$^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise (a_n) bir geometrik dizidir.

"r" ye dizinin ortak çarpanı denir.

Not : Geometrik Seri

$a_n = a.r^{n-1}$ geometrik dizisinde $|r| < 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = a.(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{k-1} + \ldots) = a.\frac{1}{1-r} = \frac{a}{1-r} \text{ dir.}$$

36. $\prod_{n=1}^{7}(3n+2)$ sayısı 10^m ile tam bölünebildiğine göre,

m'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm 36

$\prod_{n=1}^{7}(3n+2)$ sayısı 10^m ile tam bölünebildiğine göre,

çarpanları arasındaki 10 sayısının kuvvetleri bulunur.

$$\prod_{n=1}^{7}(3n+2) = (3.1 + 2).(3.2 + 2).(3.3 + 2).(3.4 + 2).(3.5 + 2).(3.6 + 2).(3.7 + 2)$$

$$= 5.8.11.14.17.20.23$$

$$= 5.2^3.11.2.7.17.2^2.5.23$$

$$= 2^6.5^2.7.11.17.23$$

$$= 2^4.2^2.5^2.7.11.17.23$$

$$= 2^4.10^2.7.11.17.23$$

Buna göre, $10^2 = 10^m$ olduğuna göre, m'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri 2 olur.

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin x}{\sin 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{1}{6}$

Çözüm 37

I. Yol

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \arcsin x}{\sin 2x} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L ' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + \arcsin x)^{/}}{(\sin 2x)^{/}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{2.\cos 2x} = \frac{1+1}{2.\cos 0} = \frac{2}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$ bulunur.

II. Yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}+\frac{\arcsin x}{\sin 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} + \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin f(x)} = 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$$

Pay ve payda 2 ile çarpılırsa, $\lim_{x\to 0}\frac{2.x}{2.\sin 2x} = \frac{1}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$\arcsin x = y$ olsun.

$\sin \ \arcsin x = \sin \ y \quad \Rightarrow \quad x = \sin y$

$x = 0$ için : $\arcsin 0 = y \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x \to 0$ ise $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(2\sin y)}$$

Pay ve payda $\frac{1}{2\sin y}$ ile çarpılırsa, $\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{2\sin y}}{\frac{\sin(2\sin y)}{2\sin y}}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2\sin y}.\frac{2\sin y}{\sin(2\sin y)} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}.\frac{2\sin y}{\sin(2\sin y)} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

Buna göre, $\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} + \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ elde edilir.

Not : L' Hospital Kuralı

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa , $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ olur.

38. $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$ limitinin değeri kaçtır?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm 38

I. Yol

$$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \to \infty}(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2})$$

$$= \lim_{x \to \infty}(|x + 1| - |x|)$$

$$= \lim_{x \to \infty}(x + 1 - x)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 1$$

$$= 1$$

II. Yol

x → + ∞ için fonksiyonunun ∞ – ∞ şeklinde bir belirsizliği vardır.

Pay ve payda köklü ifadenin eşleniği ile çarpılırsa

$$\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right).\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{x^2+2x+1-x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2.\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{2x}{|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{2x}{x.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

x → + ∞ için $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ ifadeleri sıfır olduğundan,

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1 \text{ elde edilir.}$$

Not :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}.\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}$$

$$g(x) = \sqrt{a}.\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$ alınırsa

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$ olur.

39. $f(x)$ = sin²(3x² + 2x + 1) olduğuna göre, $f^{/}(0)$ kaçtır?

A) 2cos2 B) 2cos3 C) 6sin1 D) 4sin2 E) 2sin2

Çözüm 39

$f(x) = \sin^2(3x^2 + 2x + 1)$

$f^{/}(x) = 2.\sin(3x^2 + 2x + 1).\cos(3x^2 + 2x + 1).(6x + 2)$

x = 0 için

$f^{/}(0) = 2.\sin(0 + 0 + 1).\cos(0 + 0 + 1).(0 + 2)$

$f^{/}(0) = 2.\sin1.\cos1.2$

$f^{/}(0) = (\sin2.1).2$

$f^{/}(0) = 2\sin2$

40. $f^{/}(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$f(0) = 2$

olduğuna göre, $f(-1)$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 40

$f^{/}(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$\int f^{/}(x) = \int (3x^2 + 4x + 3)$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + c$

$f(0) = 2$ olduğuna göre,

$x = 0$ için : $f(0) = 0 + 0 + 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 2$ elde edilir.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

x = – 1 için : $f(-1) = (-1)^3 + 2.(-1)^2 + 3.(-1) + 2 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = -1 + 2 - 3 + 2$

$\Rightarrow \quad f(-1) = 0$ olur.

41. $f(x) = 2x - 1$

$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$

olduğuna göre, $\lim_{x \to 2} \frac{f(g(x))}{x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm 41

I. Yol

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(g(x))}{x-2}$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2.\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) - 1 = x - \frac{2}{x} - 1 = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(g(x))}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x^2 - x - 2}{x}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x.(x-2)}$$

$$= \frac{2^2 - 2 - 2}{2.(2-2)}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

Bu durumda pay ve payda çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme yapıldıktan sonra x = 2 yazılır.

Buna göre,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x.(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1).(x-2)}{x.(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

II. Yol

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right) = 2.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)-1 = x-\frac{2}{x}-1 = \frac{x^2-x-2}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-x-2}{x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x.(x-2)} = \frac{2^2-2-2}{2.(2-2)} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L ' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 2}\frac{[f(g(x))]^{/}}{(x-2)^{/}} = \lim_{x\to 2}\frac{f^{/}(g(x)).g^{/}(x)}{1}$$

$f(x) = 2x - 1$ verildiğine göre, $f^{/}(x) = 2$

$f^{/}(x) = 2$ sabit fonksiyon olduğuna göre, $f^{/}(g(x)) = 2$ olur.

$g(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{x}$ verildiğine göre, $g^{/}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^{/}(g(x)).g^{/}(x)}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)}{1} = 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) = 2.\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

veya

$$f(g(x)) = x-\frac{2}{x}-1$$

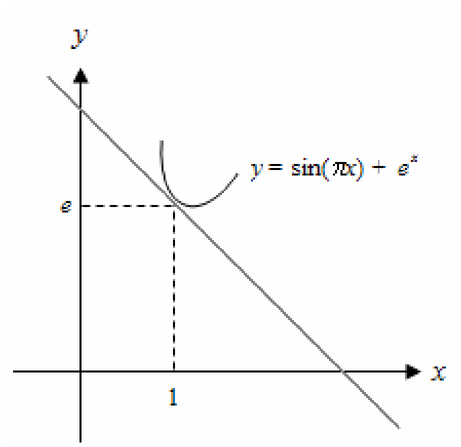
$$[f(g(x))]^{/} = \left(x-\frac{2}{x}-1\right)^{/} \quad\Rightarrow\quad [f(g(x))]^{/} = 1+\frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{[f(g(x))]^{/}}{(x-2)^{/}} = \lim_{x\to 2}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1} = 1+\frac{2}{2^2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

42. $y = \sin(\pi x) + e^x$ eğrisine $x = 1$ değerinde çizilen teğetin y eksenini kestiği noktanın ordinatı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\pi$ B) -1 C) 0 D) $e - 1$ E) π

Çözüm 42



$y = \sin(\pi x) + e^x$

$x = 1$ ise

$y = \sin(\pi.1) + e^1 \Rightarrow y = 0 + e \Rightarrow y = e$

$(1 , e)$

$y = f(x) = \sin(\pi x) + e^x$

$f'(1)$ = eğim

$y' = \pi.\cos(\pi x) + e^x$

$f'(1) = \pi.\cos(\pi.1) + e^1 \Rightarrow f'(1) = \pi.(-1) + e \Rightarrow f'(1) = e - \pi$

$(1 , e)$ ve eğim $= e - \pi$ ise

Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemine göre,

$y - e = (e - \pi).(x - 1)$

y eksenini kestiği noktanın ordinatı

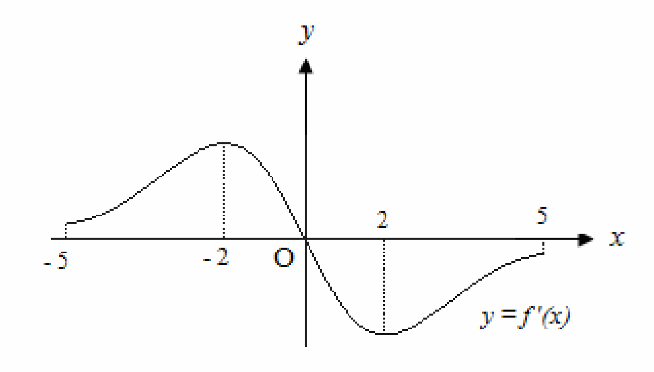
$x = 0$ için :

$y - e = (e - \pi).(0 - 1)$

$y - e = \pi - e$

$y = \pi$ bulunur.

43. Aşağıda, [– 5 , 5] aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonunun <u>türevinin grafiği</u> verilmiştir.



Bu grafiğe göre,

I. f fonksiyonu $x > 0$ için azalandır.

II. $f(-2) > f(0) > f(2)$ dir.

III. f fonksiyonunun $x = -2$ ve $x = 2$ değerlerinde yerel ekstremumu vardır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

Çözüm 43

x		0	
$f'(x)$	$+++$		$---$
$f(x)$	↗		↘

I. f fonksiyonu $x > 0$ için $f'(x) < 0$ olduğundan azalandır.

II. Artan fonksiyon tanımına göre, $-2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(-2) < f(0)$

Azalan fonksiyon tanımına göre, $0 < 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) > f(2)$ olmalıdır.

III. Türevli bir fonksiyonun bir noktada yerel ekstremumunun olması için
türevin bu noktada işaret değiştirmesi gerekir ve
türevli fonksiyonlarda yerel ekstremum noktasında türev sıfır olduğundan,

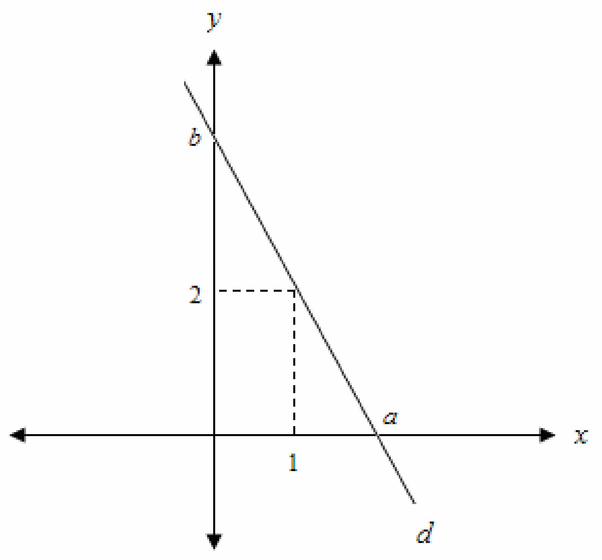
$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ yerel ekstremum noktasıdır.

44. (1 , 2) noktasından geçen negatif eğimli bir *d* doğrusu ile koordinat eksenleri arasında kalan üçgensel bölgenin alanı en az kaç birim karedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

Çözüm 44

I. Yol



Üçgensel bölgenin alanı = $\frac{a.b}{2}$

Şimdi, *a* ile *b* arasında bir bağıntı bulup alan ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazalım.

d doğrusunun denklemi :

(*a* , 0) ve (0 , *b*) ise iki noktası bilinen doğru denkleminden

$$\frac{y-0}{0-b} = \frac{x-a}{0-a} \quad \Rightarrow \quad -a.y = -b.(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}x - b$$

(1 , 2) noktası doğru üzerinde olduğundan,

$$2 = \frac{b}{a} - b \quad \Rightarrow \quad 2 = b.\left(\frac{1}{a} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{1-a}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2a}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanı $= \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{a.\left(\dfrac{2a}{a-1}\right)}{2} = \dfrac{a^2}{a-1}$

$$S_{\min} = \frac{a^2}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanının en az (minimum) olması için $S^{/} = 0$ olmalıdır.

$$S^{/} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{a-1}\right)^{/} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2a.(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(a-1)-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2-2a-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-2a = 0$$

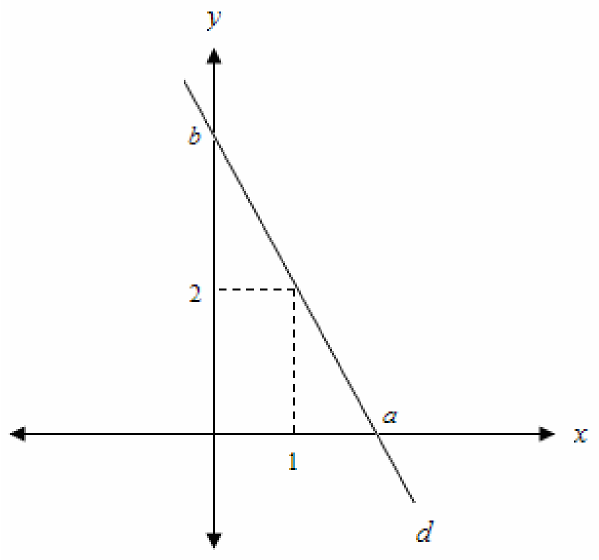
$$\Rightarrow \quad a.(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$b = \dfrac{2a}{a-1}$ olduğuna göre, $b = \dfrac{2.2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad b = 4$ olur.

Üçgensel bölgenin alanı $= S_{\min} = \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{2.4}{2} = 4$ bulunur.

II. Yol



Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2}$

Şimdi, *a* ile *b* arasında bir bağıntı bulup alan ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazalım.

Benzerlikten,

$$\frac{a-1}{a} = \frac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2a}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2} = \dfrac{a.\left(\dfrac{2a}{a-1}\right)}{2} = \dfrac{a^2}{a-1} \quad \Rightarrow \quad S = \dfrac{a^2}{a-1}$

Üçgensel bölgenin alanının en az olması için $S^{/} = 0$ olmalıdır.

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{a-1}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a.(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(a-1)-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2-2a-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-2a = 0$$

$$\Rightarrow \quad a.(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$b = \dfrac{2a}{a-1}$ olduğuna göre, $b = \dfrac{2.2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad b = 4$ olur.

Üçgensel bölgenin alanı $= S_{\min} = \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{2.4}{2} = 4$ bulunur.

Not : İki noktası bilinen doğru denklemi

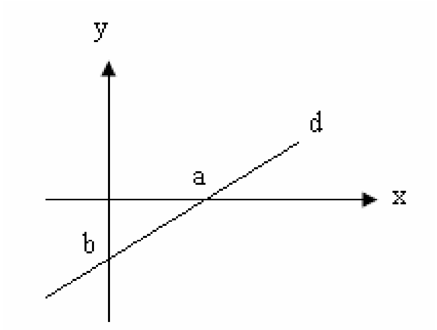
A(x_1 , y_1) ve B(x_2 , y_2) $\Rightarrow$ $\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

Not : İki noktası bilinen doğrunun eğimi

A(x_1 , y_1) ve B(x_2 , y_2) $\Rightarrow$ m = $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Not : Doğrunun eksen parçaları türünden denklemi

(a , 0) ve (0 , b) noktalarından geçen doğrunun denklemi = $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



45. Bir f fonksiyonunun grafiğinin $x = a$ değerindeki teğetinin eğimi 1,

$x = b$ değerindeki teğetinin eğimi ise $\sqrt{3}$ ’tür.

$f^{\prime\prime}(x)$ ikinci türev fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ aralığında sürekli olduğuna göre,

$\int_b^a f^{\prime}(x).f^{\prime\prime}(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm 45

$f^{\prime}(a) = 1$

$f^{\prime}(b) = \sqrt{3}$

$\int_b^a f^{\prime}(x).f^{\prime\prime}(x)\,dx$

$f^{\prime}(x) = u$ dönüşümü yapılırsa,

$f^{\prime\prime}(x)\ dx\ =\ du$

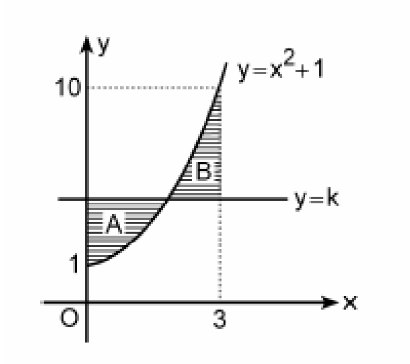
$x = a \quad \Rightarrow \quad u = f^{\prime}(a) \quad \Rightarrow \quad u = 1$

$x = b \quad \Rightarrow \quad u = f^{\prime}(b) \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{3}$

$$\int_b^a f^{\prime}(x).f^{\prime\prime}(x)\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{1} u\ du\ = \left.\frac{u^2}{2}\ \right|_{\sqrt{3}}^{1}$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ bulunur.}$$

46. Aşağıdaki grafikte, A ve B bölgelerinin alanları eşit olacak şekilde y = k doğrusu verilmiştir.

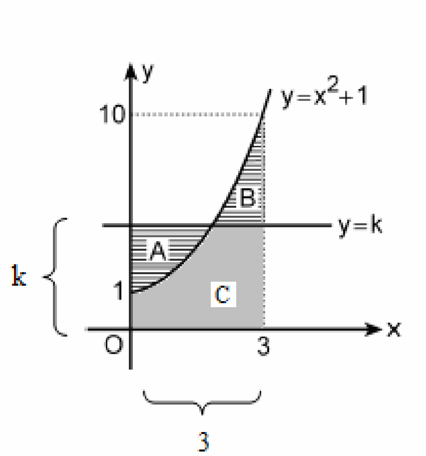


Buna göre, k'nin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{11}{2}$

Çözüm 46

I. Yol



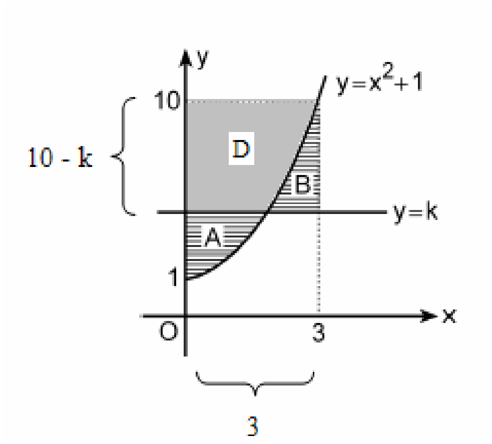
A = B olduğuna göre, A + C = B + C

A + C = 3.k

$$B + C = \int_0^3 (x^2+1)\ dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{0}{3} + 0\right) = 12$$

A + C = B + C olduğuna göre, 3.k = 12 $\Rightarrow$ k = 4 elde edilir.

II. Yol



A = B olduğuna göre, A + D = B + D

B + D = 3.(10 – k)

$y = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y-1}$

$$A + D = \int_1^{10} \sqrt{y-1}\ dy = \int_1^{10} (y-1)^{\frac{1}{2}}\ dy$$

$$= \left.\frac{(y-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{10} = \left.\frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^{10} = \left.\frac{2\sqrt{(y-1)^3}}{3}\right|_1^{10} = \left.\frac{2(y-1)\sqrt{y-1}}{3}\right|_1^{10}$$

$$= \left(\frac{2(10-1)\sqrt{(10-1)}}{3}\right) - \left(\frac{2(1-1\sqrt{1-1})}{3}\right) = \left(\frac{2.9.\sqrt{9}}{3}\right) - 0 = 18$$

A + D = B + D olduğuna göre,

$18 = 3.(10 - k) \quad \Rightarrow \quad 10 - k = 6 \quad \Rightarrow \quad k = 4$ olur.

47. $\int_1^e \ln^3 x\,dx = 6 - 2e$ olduğuna göre, $\int_1^e \ln^4 x\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $7e - 16$ B) $8e - 18$ C) $9e - 24$ D) $10e - 26$ E) $11e - 28$

Çözüm 47

I. Yol

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$\ln^4 x = u \quad \Rightarrow \quad (\ln^4 x)' = (u)' \quad \Rightarrow \quad 4.\ln^3 x.\frac{1}{x}dx = du$$

$$dx = dv \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int dv \quad \Rightarrow \quad x = v$$

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx = x.\ln^4 x - \int_1^e x.4\ln^3 x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x.\ln^4 x \Big|_1^e - 4\int_1^e \ln^3 x\,dx$$

$$= (e.\ln^4 e - 1.\ln^4 1) - 4\int_1^e \ln^3 x\,dx$$

$\int_1^e \ln^3 x\,dx = 6 - 2e$ olduğuna göre,

$$= (e.1 - 1.0) - 4.(6 - 2e)$$

$= e - 24 + 8e$

$= 9e - 24$ elde edilir.

II. Yol

$\int_1^e \ln^4 x\,dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad e^t = x$

$\Rightarrow \quad (e^t)^/ = x^/ \quad \Rightarrow \quad e^t dt = dx$

x = e $\quad \Rightarrow \quad \ln e = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

x = 1 $\quad \Rightarrow \quad \ln 1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx = \int_0^1 t^4\ e^t dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^4 = u \quad \Rightarrow \quad (t^4)^/ = u^/ \quad \Rightarrow \quad 4t^3 dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^4 e^t dt = e^t.t^4 - \int_0^1 e^t 4t^3 dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$$

Verilen $\int_1^e \ln^3 x\ dx$ integralide t değişkenine göre düzenlenirse,

$\int_1^e \ln^3 x\ dx = \int_0^1 t^3 e^t dt = 6 - 2e$ olacağına göre,

$$\int_0^1 t^4\ e^t dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 t^3 e^t dt$$

$$= e^t.t^4 \Big|_0^1 - 4.(6 - 2e) = (e - 0) - 24 + 8e = 9e - 24$$

III. Yol

$\int_1^e \ln^4 x\,dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad e^t = x$

$\Rightarrow \quad (e^t)' = x' \quad \Rightarrow \quad e^t dt = dx$

x = e $\quad \Rightarrow \quad \ln e = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

x = 1 $\quad \Rightarrow \quad \ln 1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx = \int_0^1 t^4 \; e^t dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^4 = u \quad \Rightarrow \quad (t^4)' = u' \quad \Rightarrow \quad 4t^3 dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^4 \; e^t dt \; = \; e^t.t^4 - \int_0^1 e^t\, 4t^3 dt \; = \; e^t.t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$$

$$\int_0^1 e^t t^3 dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^3 = u \quad \Rightarrow \quad (t^3)' = u' \quad \Rightarrow \quad 3t^2 dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^3 e^t dt \; = \; e^t.t^3 - \int_0^1 e^t\, 3t^2 dt \; = \; e^t.t^3 - 3\int_0^1 e^t t^2 dt$$

$$\int_0^1 e^t t^2 dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$t^2 = u \quad \Rightarrow \quad (t^2)' = u' \quad \Rightarrow \quad 2t \ dt = du$$

$$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e^t.t^2 - \int_0^1 e^t 2t \ dt = e^t.t^2 - 2\int_0^1 e^t t \ dt$$

$$\int_0^1 e^t t \ dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$t = u \quad \Rightarrow \quad (t)' = u' \quad \Rightarrow \quad dt = du$$

$$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$$

$$\int_0^1 te^t dt = e^t.t - \int_0^1 e^t dt = e^t.t - e^t$$

Buna göre, $\int_1^e \ln^4 x\, dx = \int_0^1 t^4 \; e^t dt \; = \; e^t.t^4 \; - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$

$\int_0^1 t^3 e^t dt \; = \; e^t.t^3 \; - 3\int_0^1 e^t t^2 dt$ olduğuna göre,

$$= \; e^t.t^4 \; - 4.\left(e^t.t^3 \; - 3\int_0^1 e^t t^2 dt \right)$$

$\int_0^1 t^2 e^t dt \; = \; e^t.t^2 \; - 2\int_0^1 e^t t \;\; dt$ olduğuna göre,

$$= \; e^t.t^4 \; - 4.\left(e^t.t^3 \; - 3.\left(e^t.t^2 \; - 2\int_0^1 e^t t \;\; dt \right)\right)$$

$\int_0^1 e^t t \;\; dt \; = \; e^t.t - e^t$ olduğuna göre,

$= \; e^t.t^4 \; - 4.\left(e^t.t^3 \; - 3.\left(e^t.t^2 \; - 2.\left(e^t.t - e^t\right)\right)\right)$ elde edilir.

$$= \; e^t.t^4 \; - 4.\left(e^t t^3 \; - 3.\left(e^t.t^2 \; - 2.\left(e^t t - e^t\right)\right)\right)$$

$$= \; e^t.t^4 \; - 4.\left(e^t t^3 \; - 3.\left(e^t.t^2 \; - 2.e^t t + 2e^t\right)\right)$$

$$= \; e^t.t^4 \; - 4.\left(e^t t^3 \; - 3.e^t.t^2 \; + 6.e^t t - 6e^t\right)$$

$= \; e^t.t^4 \; - 4.e^t t^3 \; + 12.e^t.t^2 \; - 24.e^t t + 24e^t$ olur.

Sonuç olarak

$$\int_0^1 t^4 \; e^t dt \; = \; e^t.(t^4 \; - 4t^3 \; + 12t^2 \; - 24t + 24) \Bigg|_0^1$$

$= \; (e^1.(1^4 \; - 4.1^3 \; + 12.1^2 \; - 24.1 + 24)) - (e^0.(24)) \; = e.(1 - 4 + 12 - 24 + 24) - 24$

$= 9e - 24$ bulunur.

Not : Kısmi (parçalı) integrasyon yöntemi

İki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında
genelde, kısmi integrasyon yöntemi kullanılır.

$u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise çarpımın türevi formülüne göre,

$(u.v)' = u'.v + v'.u$ yazarız.

Her iki tarafı dx ile çarpıp integrallersek, $\int (u.v)' \, dx = \int u'.v \, dx + \int v'.u \, dx$ bulunur.

Belirsiz integralin tanımından, $\int (u.v)' \, dx = u.v$ yazılabilir.

Bunu dikkate alarak, $u.v = \int u.v' \, dx + \int v.u' \, dx$ formülünü elde ederiz.

$$u' = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad u' \, dx = du \quad ,$$

$$v' = \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad v' \, dx = dv$$ olduğundan,

$$u.v = \int u \, dv + \int v \, du \qquad \Rightarrow \qquad \int u \, dv = u.v - \int v \, du$$ elde edilir.

48. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ integralinde $u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa

aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int \ln u \; du$ B) $\int 2\ln u \; du$ C) $\int \frac{\ln u}{u}\,du$ D) $\int \frac{\ln u}{2u}\,du$ E) $\int u\ln u \; du$

Çözüm 48

$u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa,

$$u' = (\sqrt{x})' \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 2u \; du = dx$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\ln u}{u}\,2u \; du$$

$$= \int 2\ln u \; du$$ elde edilir.

49. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

Buna göre, $\det(A^2 - B^2)$ kaçtır?

A) – 4 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm 49

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+1.0 & 1.1+1.1 \\ 0.1+1.0 & 0.1+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.1 & 1.0+0.1 \\ 1.1+1.1 & 1.0+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-0 \\ 0-2 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^2 - B^2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.0 - (-2).2 = 4 \text{ bulunur.}$$

50. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 50

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.x + 2.y \\ -1.x + 3.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ olduğuna göre,

$x + 2y = 1$

$-x + 3y = 9$

$5y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$\quad \Rightarrow \quad x = -3$

Buna göre, $x + y = -3 + 2 = -1$ elde edilir.

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA

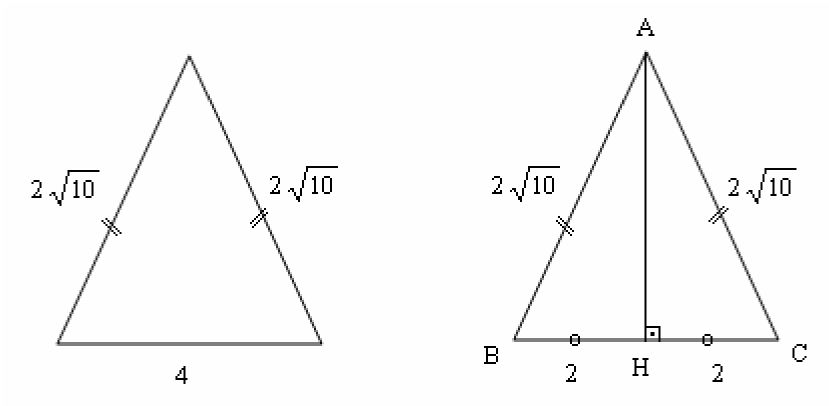
Lisans Yerleştirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 18 Haziran 2011

Geometri Soruları ve Çözümleri

1. Bir ikizkenar üçgenin eş kenarlarının her birinin uzunluğu $2\sqrt{10}$ cm ve üçüncü kenarının uzunluğu 4 cm olduğuna göre, alanı kaç cm² dir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

Çözüm 1



BAC ikizkenar üçgeninin yüksekliği çizilirse,

İkizkenar üçgende tabana ait yükseklik, aynı zamanda kenarortay olduğundan,

$|BH| = |HC| = 2$ olur.

AHC dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

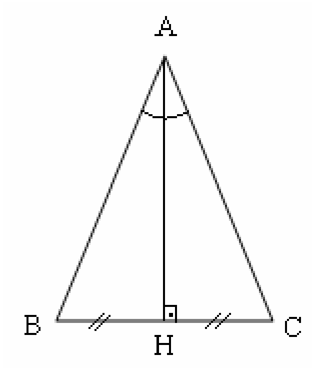
$(2\sqrt{10})^2 = 2^2 + |AH|^2 \Rightarrow |AH| = 6$

$\text{Alan}(ABC) = \dfrac{4.6}{2} \Rightarrow \text{Alan}(ABC) = 12$ elde edilir.

Not : İkizkenar Üçgen

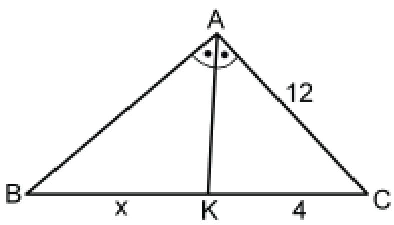
Tabana ait yükseklik aynı zamanda açıortay ve kenarortaydır.

B'den [AC]'ye veya C'den [AB]'ye çizilen dikme için aynı şeyleri söyleyemeyiz.



[AH] = Açıortay = Kenarortay = Yükseklik $\Rightarrow$ $n_A = V_a = h_a$

2.



ABC bir üçgen

[AK] açıortay

$|AC| = 12$ cm

$|KC| = 4$ cm

$|BK| = x$

Şekildeki ABC üçgeninin çevresi 44 cm olduğuna göre, x kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

Çözüm 2

BAC üçgeninde iç açıortay teoremine göre,

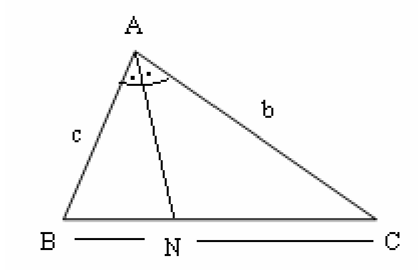
$\frac{|AB|}{12} = \frac{x}{4}$ $\Rightarrow$ $|AB| = 3x$ olur.

Çevre(ABC) = 44 olduğuna göre,

$3x + 12 + 4 + x = 44$ $\Rightarrow$ $4x = 28$ $\Rightarrow$ $x = 7$ elde edilir.

Not : Açıortay teoremi

Bir üçgende bir açının açıortayı karşı kenarı diğer kenarlar oranında böler.



AN iç açıortay ise, $\frac{|NB|}{|NC|} = \frac{c}{b}$

3. Bir ABC üçgeninin

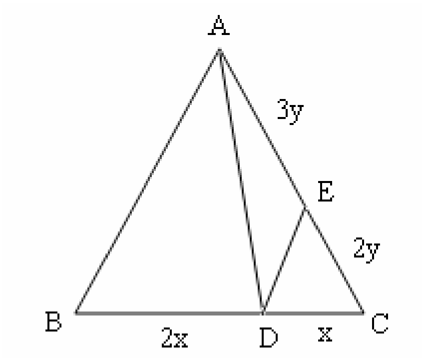
[BC] kenarı üzerinde $|BD| = 2|DC|$ olacak biçimde bir D noktası ve

[AC] kenarı üzerinde $2|AE| = 3|EC|$ olacak biçimde bir E noktası işaretlenmiştir.

ABC üçgeninin alanı 75 cm² olduğuna göre, EDC üçgeninin alanı kaç cm² dir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

Çözüm 3



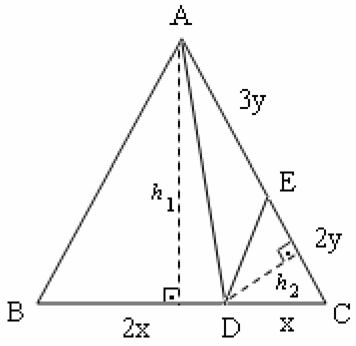
$|DC| = x$ olsun.

$|BD| = 2|DC|$ olduğuna göre, $|BD| = 2x$ olur.

$|AE| = 3y$ olsun.

$2|AE| = 3|EC|$ olduğuna göre, $|EC| = 2y$ olur.

ABC üçgeninin ve ADC üçgeninin yükseklikleri çizilirse,



ABC üçgeninin yüksekliği : h_1 olsun.

Alan(ABC) = 75 = $\dfrac{h_1.3x}{2}$ $\Rightarrow$ $h_1.x = 50$

ADC üçgeninin de yüksekliği h_1 olduğuna göre,

Alan(ADC) = $\dfrac{h_1.x}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$

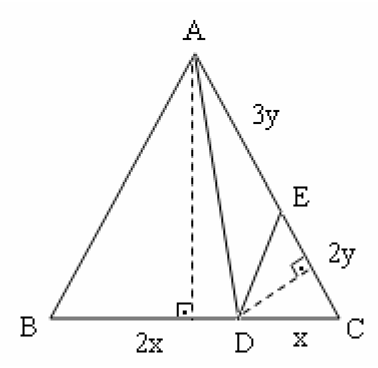
ADC üçgeninin yüksekliği : h_2 olsun.

Alan(ADC) = 25 = $\dfrac{h_2.5y}{2}$ $\Rightarrow$ $h_2.y = 10$

EDC üçgeninin de yüksekliği h_2 olduğuna göre,

Alan(EDC) = $\dfrac{h_2.2y}{2} = \dfrac{20}{2}$ = 10 bulunur.

veya



ABC üçgeninin ve ADC üçgeninin yükseklikleri çizilirse,

ABC üçgenine göre,

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olduğuna göre,

Alan(ABC) = 75 olduğundan,

$$\frac{Alan(ABC)}{Alan(ADC)} = \frac{3x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{75}{Alan(ADC)} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad \text{Alan(ADC) = 25}$$

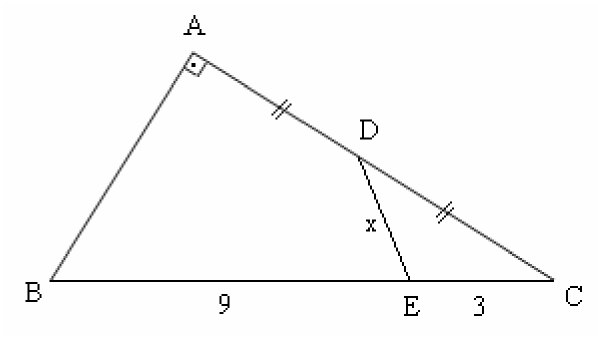
ADC üçgenine göre,

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olduğuna göre,

Alan(ABC) = 75 olduğundan,

$$\frac{Alan(ADC)}{Alan(EDC)} = \frac{5y}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{Alan(EDC)} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Alan(EDC) = 10 elde edilir.}$$

4.



ABC bir dik üçgen

BA ⊥ AC

|AD| = |DC|

|EC| = 3 cm

|BE| = 9 cm

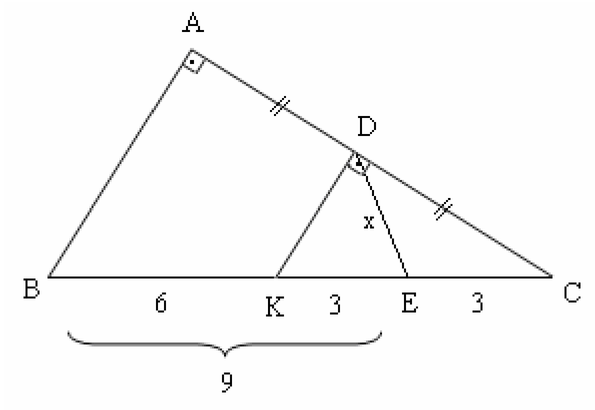
|DE| = x

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm’dir?

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{10}{3}$ C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm 4

AB // DK çizilirse,



BA ⊥ AC $\Rightarrow$ m(BAC) = m(KDC) = 90

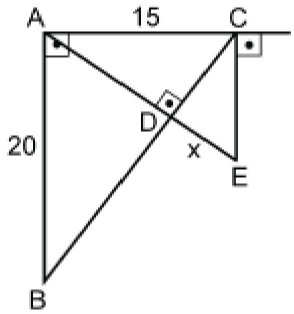
CDK ≅ CAB olacağına göre, $\frac{|CK|}{12} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ |CK| = 6

|EC| = 3 olduğuna göre, |KE| = 3 olur.

KDC dik üçgeninde, hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu,

hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşit olduğuna göre, x = 3 olur.

5.



AB ⊥ AC

AE ⊥ BC

AC⊥ CE

$|AB| = 20$ cm

$|AC| = 15$ cm

$|DE| = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm'dir?

A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{25}{3}$ C) $\frac{32}{3}$ D) $\frac{27}{4}$ E) $\frac{36}{5}$

Çözüm 5

BAC dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

$|BC|^2 = 20^2 + 15^2 \quad \Rightarrow \quad |BC| = 25$

BAC dik üçgeninde öklid teoremine göre,

$20^2 = |BD|.25 \quad \Rightarrow \quad |BD| = 16$

$|BC| = 25$ olduğuna göre, $|DC| = 25 - 16 \quad \Rightarrow \quad |DC| = 9$

BAC dik üçgeninde öklid bağıntısına göre,

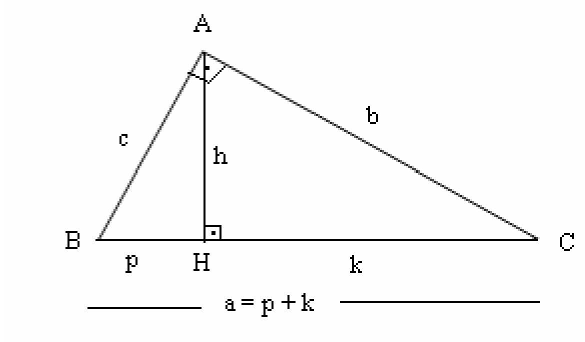
$|AD|^2 = 16.9 \quad \Rightarrow \quad |AD| = 12$

CDE ≅ BDA $\quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16} = \frac{x}{12} = \frac{|CE|}{20}$

$\Rightarrow \quad |CE| = \frac{45}{4}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{27}{4}$ elde edilir.

Not : Öklid bağıntıları



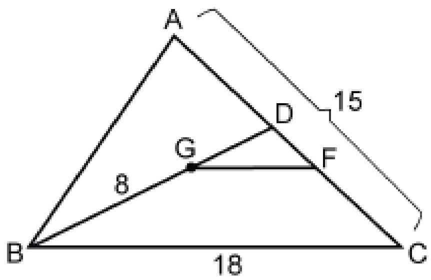
I) $h^2 = p.k$

II) $c^2 = p.a$

$b^2 = k.a$

III) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

6.



GF // BC

[BD] kenarortay

$|AC| = 15$ cm

$|BC| = 18$ cm

$|BG| = 8$ cm

Şekildeki G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.

Buna göre, DGF üçgeninin çevresi kaç cm'dir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) $\frac{23}{2}$ E) $\frac{25}{2}$

Çözüm 6

G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre,

$|BG| = 8 \quad \Rightarrow \quad |GD| = 4$ olur.

[BD] kenarortay olduğuna göre, $|AD| = |DC| = \frac{15}{2}$

GF // BC $\quad \Rightarrow \quad$ DGF $\cong$ DBC

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{12} = \frac{|GF|}{18} = \frac{|DF|}{\frac{15}{2}} \quad \Rightarrow \quad |GF| = 6$$

$$\Rightarrow \quad |DF| = \frac{5}{2}$$

Buna göre, çevre(DGF) $= 4 + 6 + \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$ olur.

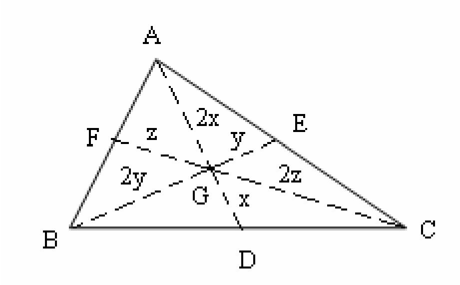
Not : Kenarortay

Bir üçgenin kenarortayları aynı bir noktada kesişirler.

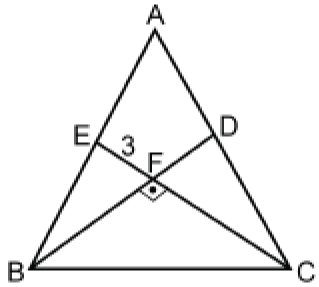
Bu kesim noktasına G ağırlık merkezi denir.

$$|GD| = \frac{1}{3}.|AD|$$

$$|AG| = \frac{2}{3}.|AD|$$



7.



ABC bir ikizkenar üçgen

$|AB| = |AC|$

[BD] ve [CE] kenarortay

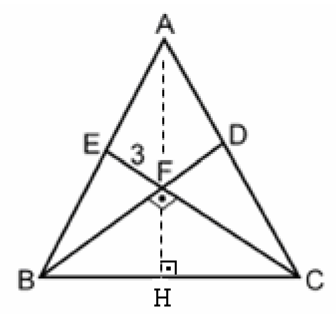
$|EF| = 3$ cm

Şekildeki ABC ikizkenar üçgeninin BD ve CE kenarortayları F noktasında kesişmektedir.

Buna göre, ABC ikizkenar üçgeninin alanı kaç cm² dir?

A) 42 B) 45 C) 48 D) 50 E) 54

Çözüm 7



ABC ikizkenar üçgeninde tabana ait yükseklik, aynı zamanda kenarortay olduğundan,

F noktası kenarortayların kesim noktası ise

$|EF| = |FD| = 3 \Rightarrow |FC| = |FB| = 6$

BFC dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

$|BC|^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow |BC| = 6\sqrt{2}$

BFC dik üçgeninde, hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu,

hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşit olduğuna göre, $|FH| = 3\sqrt{2}$ olur.

$|FH| = 3\sqrt{2}$ olduğuna göre, $|AF| = 6\sqrt{2}$

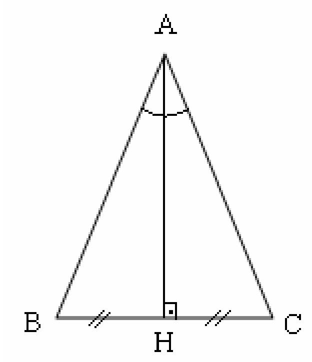
$|AH| = 9\sqrt{2}$ ve $|BC| = 6\sqrt{2}$

$\text{Alan}(ABC) = \dfrac{6\sqrt{2}.9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Alan}(ABC) = 54$ bulunur.

Not : İkizkenar Üçgen

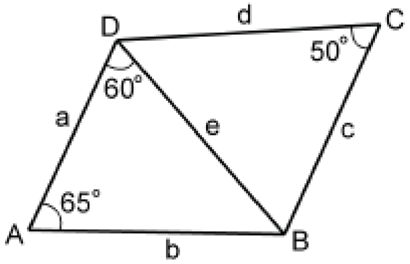
Tabana ait yükseklik aynı zamanda açıortay ve kenarortaydır.

B'den [AC]'ye veya C'den [AB]'ye çizilen dikme için aynı şeyleri söyleyemeyiz.



[AH] = Açıortay = Kenarortay = Yükseklik $\Rightarrow$ $n_A = V_a = h_a$

8.



m(BDA) = 60°

m(DAB) = 65°

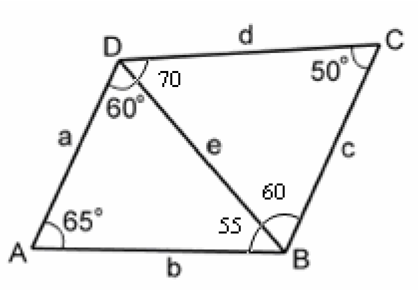
m(BCD) = 50°

Yukarıdaki şekilde AD // BC'dir.

Buna göre, a, b, c, d ve e ile belirtilen kenarlardan <u>en uzunu</u> hangisidir?

A) a B) b C) c D) d E) e

Çözüm 8



Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar bulunacağından,

ABD üçgeninde,

m(ABD) = 180 – (60 + 65) $\Rightarrow$ m(ABD) = 55

ABD üçgeninde, e > b > a

AD // BC olduğuna göre, m(ADB) = m(DBC) = 60 iç – ters açı

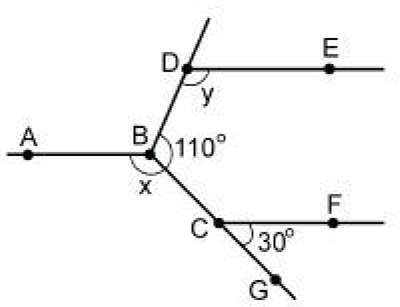
BDC üçgeninde,

m(CDB) = 180 – (60 + 50) $\Rightarrow$ m(CDB) = 70

BDC üçgeninde, c > d > e

Buna göre, c > d > e > b > a elde edilir.

9.



DE // AB // CF

m(DBC) = 110°

m(FCG) = 30°

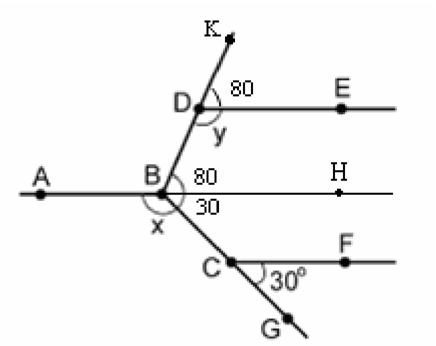
m(ABC) = x

m(EDB) = y

Yukarıdaki verilere göre, x – y farkı kaç derecedir?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

Çözüm 9



m(HBD) = m(EDK) = 80 → yöndeş açılar

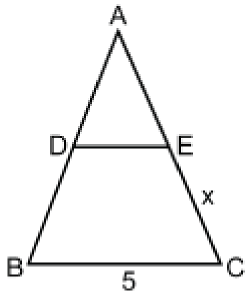
80 + y = 180 ⇒ y = 100

m(GCF) = m(GBH) = 30 → yöndeş açılar

30 + x = 180 ⇒ x = 150

Buna göre, x – y = 150 – 100 ⇒ x – y = 50 bulunur.

10.



ABC bir ikizkenar üçgen

DE // BC

$|BC| = 5$ cm

$|EC| = x$

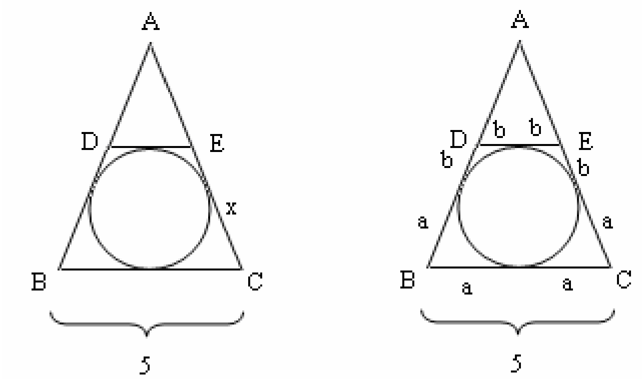
Şekildeki ABC üçgeninde $|AB| = |AC| = 10$ cm'dir.

BCED bir <u>teğetler dörtgeni</u> olduğuna göre, x kaç cm'dir?

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{9}{2}$ C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm 10

Kenarları bir çembere teğet olan dörtgene teğetler dörtgeni denildiğine göre,



Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan,

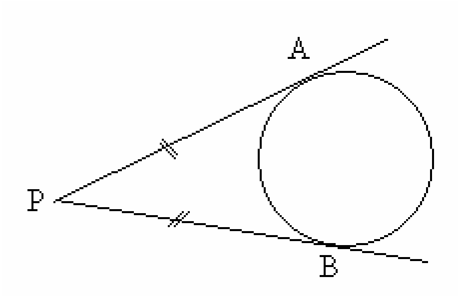
ABC bir ikizkenar üçgen olduğuna göre, $2a = 5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{2}$

DE // BC $\quad \Rightarrow \quad$ ADE $\cong$ ABC $\quad \Rightarrow \quad \frac{2b}{5} = \frac{10 - (\frac{5}{2} + b)}{10}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2b}{5} = \frac{15 - 2b}{20} \quad \Rightarrow \quad 8b = 15 - 2b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{2}$$

$x = a + b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 4$ elde edilir.

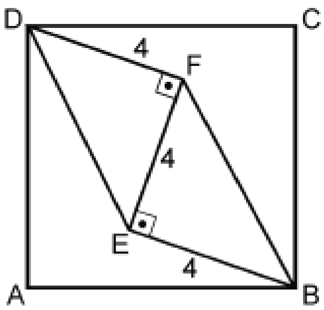
Not :



Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

$|PA| = |PB|$

11.



ABCD bir kare

$DF \perp FE$

$FE \perp EB$

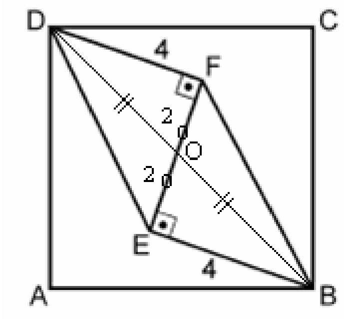
$|DF| = |FE| = |EB| = 4$ cm

Yukarıdaki verilere göre, ABCD karesinin alanı kaç cm² dir?

A) 32 B) 36 C) 40 D) 48 E) 50

Çözüm 11

DB çizilirse,

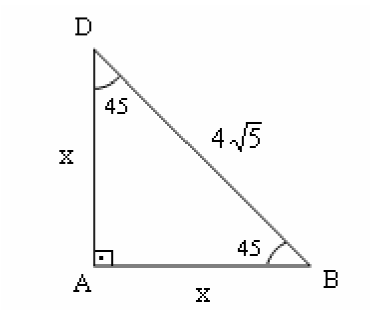


BEFD paralel kenar olacağından, köşegenler birbirini ortalar.

$|OF| = |OE| = 2$ olur.

OEB dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre, $|OB|^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow |OB| = 2\sqrt{5}$

$|OB| = 2\sqrt{5}$ olduğuna göre, $|DB| = 4\sqrt{5}$ olur.



BAD ikizkenar dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

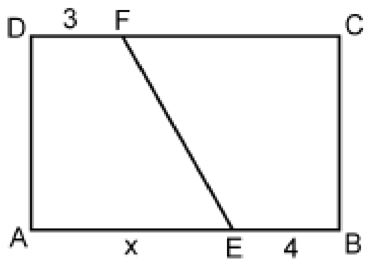
$(4\sqrt{5})^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 80 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$

$\text{Alan(ABCD)} = x^2 \Rightarrow \text{Alan(ABCD)} = (2\sqrt{10})^2$

$\Rightarrow \text{Alan(ABCD)} = 40$

Not : Bir karede köşegenler açıların açıortayıdır.

12.



ABCD bir dikdörtgen

$|DF| = 3$ cm

$|EB| = 4$ cm

$|AE| = x$

Şekildeki AEFD ve EBCF yamuklarının alanları arasında

$\dfrac{A(AEFD)}{A(EBCF)} = \dfrac{5}{6}$ ilişkisi olduğuna göre, x kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) $\dfrac{15}{2}$ E) $\dfrac{22}{3}$

Çözüm 12

AEFD ve EBCF yamuklarının yükseklikleri : $|AD| = h$ olsun.

$|CF| = [(4 + x) - 3] \Rightarrow |CF| = 1 + x$

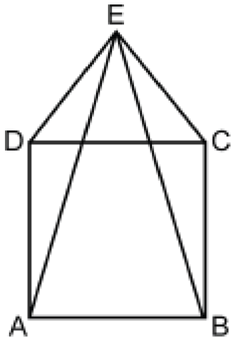
$$\frac{A(AEFD)}{A(EBCF)} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{(3+x).h}{2}}{\dfrac{(4+(1+x)).h}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3+x}{5+x} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 18 + 6x = 25 + 5x$$

$$\Rightarrow \quad x = 7$$

13.



ABCD bir kare

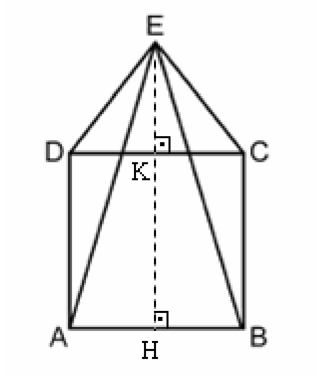
EDC bir üçgen

Şekildeki EDC ve EAB üçgenlerinin alanları arasında

$A(EDC) = \frac{2}{5}.A(EAB)$ ilişkisi olduğuna göre, $\frac{A(EDC)}{A(ABCD)}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Çözüm 13



$A(EDC) = \frac{2}{5}.A(EAB)$

$$\frac{|EK|.|DC|}{2} = \frac{2}{5}.\frac{|EH|.|AB|}{2}$$

ABCD bir kare olduğundan, $|AB| = |DC|$ olur.

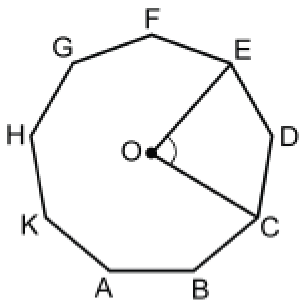
$\frac{|EK|}{|EH|} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{|EK|}{|EH|} = \frac{2x}{5x}$ olsun.

$|KH| = 5x - 2x \quad \Rightarrow \quad |KH| = 3x$

$\Rightarrow \quad |AB| = |DC| = |KH| = 3x$

$\frac{A(EDC)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{2x.3x}{2}}{(3x)^2} = \frac{1}{3}$ elde edilir.

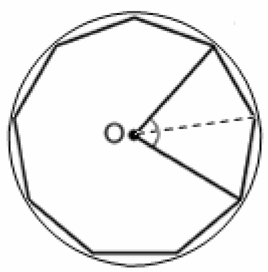
14. Aşağıdaki ABCDEFGHK <u>düzgün dokuzgeni</u> verilmiştir.

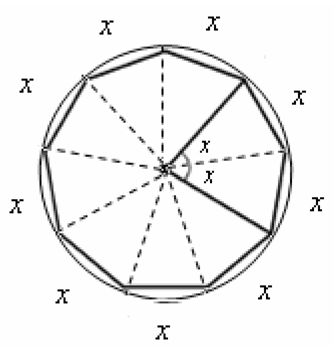


O noktası dokuzgenin köşelerinden geçen çemberin merkezi olduğuna göre,
EOC açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 60 B) 72 C) 75 D) 80 E) 90

Çözüm 14



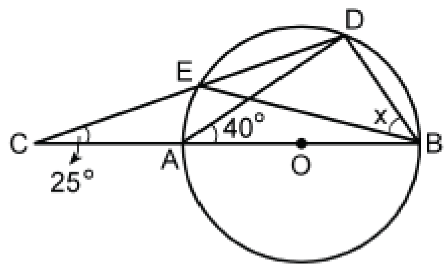


$x = \dfrac{360}{9} \Rightarrow x = 40$

Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğuna göre,

$m(COE) = 2.x = 2.40 \Rightarrow m(COE) = 80$ bulunur.

15.



m(DCB) = 25°

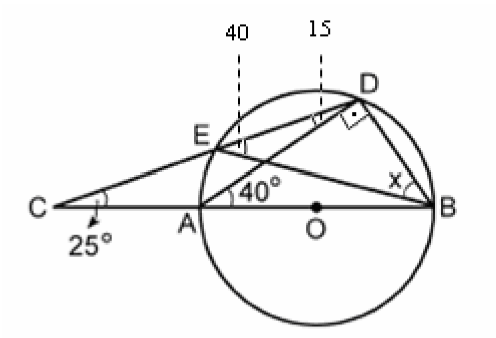
m(DAB) = 40°

m(DBE) = x

Şekildeki A, B, D ve E noktaları O merkezli [AB] çaplı çember üzerindedir.
Buna göre, x kaç derecedir?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm 15



Çapı gören çevre açı 90° olduğuna göre, m(ADB) = 90 olur.

Aynı yayı gören çevre açıların ölçüsü birbirine eşit olduğundan,

m(BAD) = 40 = m(BED)

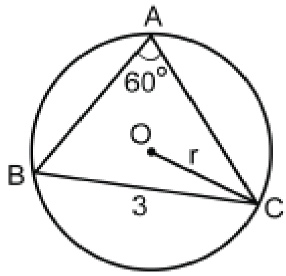
Bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan,

CAD üçgeninde, m(CDA) + 25 = 40 $\Rightarrow$ m(CDA) = 15

BED üçgeninde,

40 + x + 90 + 15 = 180 $\Rightarrow$ x = 35 elde edilir.

16.



m(BAC) = 60°

$|BC| = 3$ cm

$|OC| = r$

Şekildeki O merkezli çember ABC üçgeninin çevrel çemberidir.

Buna göre, r kaç cm'dir?

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm 16

I. Yol

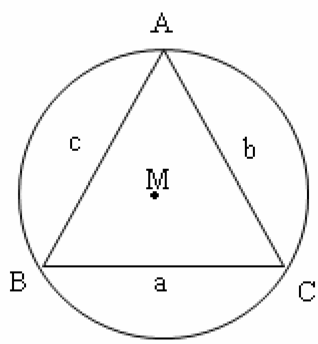
Sinüs teoremine göre,

$$\frac{3}{\sin 60} = 2r \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{\sqrt{3}} = 2r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3} \text{ elde edilir.}$$

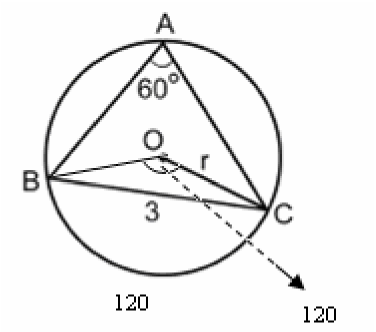
Not : Sinüs Teoremi

Kenar uzunlukları a , b , c birim olan ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R ise



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ dir.}$$

II. Yol



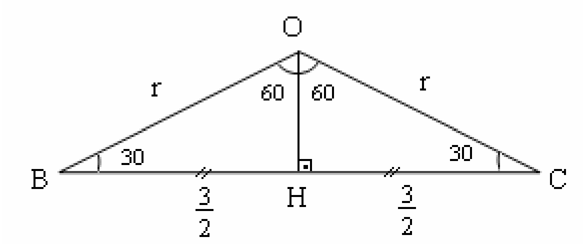
Çevre açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğundan,

m(BAC) = 60 $\Rightarrow$ BC yayı = 120

Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan,

BC yayı = 120 = m(BOC)

$|BO| = |OC| = r$ olduğundan, BOC ikizkenar üçgen olur.



BOC ikizkenar üçgeninin yüksekliği çizilirse,

İkizkenar üçgende tabana ait yükseklik, aynı zamanda kenarortay olduğundan,

$|BH| = |HC| = \dfrac{3}{2}$ olur.

OHC dik üçgeninde,

$60°$ karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşit olduğundan,

$$r.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{3}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

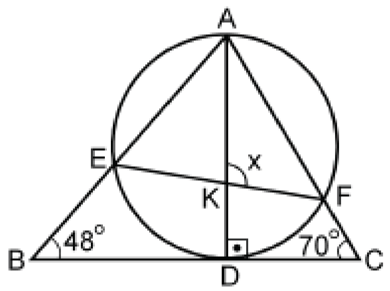
Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

17. Aşağıdaki şekilde ABC üçgeninin [AD] yüksekliğini çap kabul eden çember verilmiştir. Bu çember ile üçgenin [AB] kenarının kesim noktası E,
[AC] kenarının kesim noktası ise F'dir.



m(ABC) = 48°

m(ACB) = 70°

m(AKF) = x

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

A) 112 B) 114 C) 116 D) 118 E) 120

Çözüm 17

I. Yol

x, çemberde iç açı olduğuna göre,

BDA dik üçgeninde,

48 + m(BAD) + 90 = 180 $\Rightarrow$ m(BAD) = 42

m(BAD) = 42 çevre açı $\Rightarrow$ ED yayı = 84

CDA dik üçgeninde,

70 + m(CAD) + 90 = 180 $\Rightarrow$ m(CAD) = 20

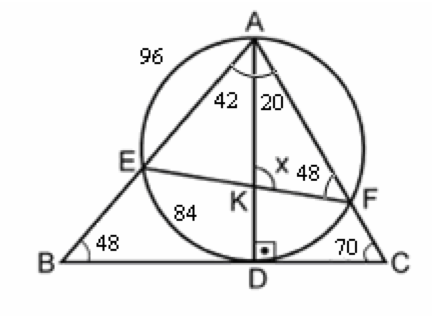
m(CAD) = 20 çevre açı $\Rightarrow$ FD yayı = 40

$\Rightarrow$ FA yayı = 180 – 40 = 140

Çemberde iç açının ölçüsü gördüğü yayların ölçülerinin toplamının yarısına eşit olduğundan,

$x = \dfrac{140 + 84}{2} \Rightarrow x = 112$ bulunur.

II. Yol



BDA dik üçgeninde,

48 + m(BAD) + 90 = 180 $\Rightarrow$ m(BAD) = 42

m(BAD) = 42 çevre açı $\Rightarrow$ ED yayı = 84

$\Rightarrow$ EA yayı = 180 – 84 = 96

EA yayı = 96 çevre açı $\Rightarrow$ m(AFE) = 48

CDA dik üçgeninde,

70 + m(CAD) + 90 = 180 $\Rightarrow$ m(CAD) = 20

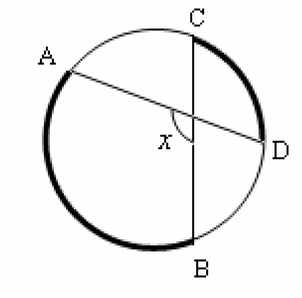
KFA üçgeninde,

48 + x + 20 = 180 $\Rightarrow$ x = 112 elde edilir.

Not : Çemberde iç açı

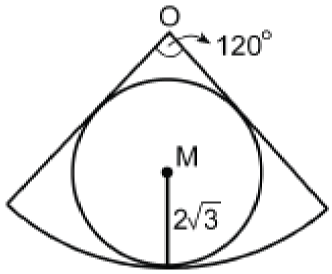
Köşesi çemberin iç bölgesinde olan açıya iç açı denir.

İç açının ölçüsü gördüğü yayların ölçülerinin toplamının yarısına eşittir.



$$x = \frac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})}{2}$$

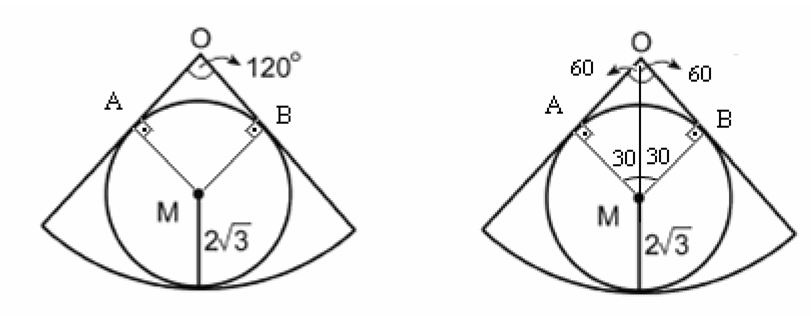
18. Aşağıdaki merkez açısının ölçüsü 120° olan O merkezli daire dilimiyle bu daire dilimine içten teğet olan M merkezli $2\sqrt{3}$ cm yarıçaplı çember verilmiştir.



Buna göre, O merkezli dairenin yarıçapı kaç cm'dir?

A) $\sqrt{6}+2$ B) $\sqrt{6}+4$ C) $2\sqrt{3}+1$ D) $2\sqrt{3}+2$ E) $2\sqrt{3}+4$

Çözüm 18



Yarıçap teğete değme noktasında dik olduğuna göre, OA ⊥ MA ve OB ⊥ MB olur.

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan,

$|OA| = |OB|$

MAOB dörtgeninin OM köşegeni çizilirse, [OM] açıortaydır.

OAM dik üçgeni 30 – 60 – 90 üçgeni olur.

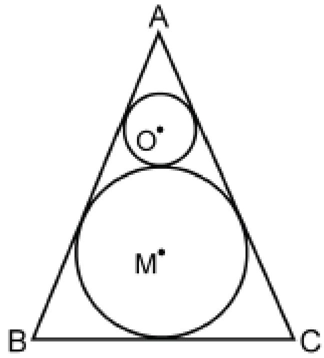
$|MA| = |MB| = 2\sqrt{3}$ olduğuna göre,

Dik üçgende 60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşit olacağına göre,

$$|OM|.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |OM| = 4$$

Buna göre, O merkezli dairenin yarıçapı = 4 + $2\sqrt{3}$ elde edilir.

19.



ABC bir ikizkenar üçgen

$|AB| = |AC|$

Şekildeki O ve M merkezli çemberlerin yarıçapları sırasıyla 2 cm ve 8 cm'dir.

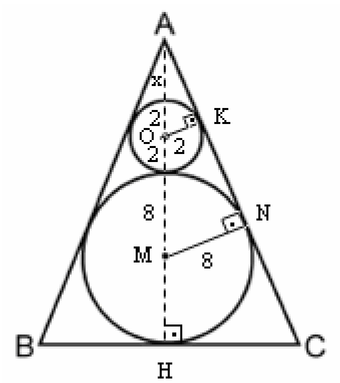
Bu iki çember ABC ikizkenar üçgenine içten, birbirlerine ise dıştan teğettir.

Buna göre, ABC üçgeninin [BC] kenarına ait yüksekliği kaç cm'dir?

A) $\frac{64}{3}$ B) $\frac{68}{3}$ C) $\frac{70}{3}$ D) $\frac{81}{4}$ E) $\frac{85}{4}$

Çözüm 19

ABC ikizkenar üçgeninin yüksekliği çizilirse,



Yarıçap teğete değme noktasında dik olduğuna göre, OK ⊥ AC ve MN ⊥ AC olur.

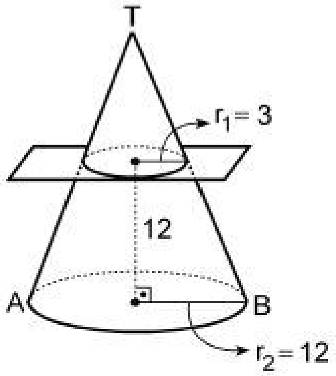
$$AOK \cong AMN \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{x+2+2+8} = \frac{2}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{x+12} = \frac{2}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$$

ABC üçgeninin [BC] kenarına ait yüksekliği = x + 2 + 2 + 8 + 8

$$= \frac{4}{3} + 20$$

$$= \frac{64}{3}$$

20. Bir dik dairesel koni, tabana paralel bir düzlemle kesiliyor.

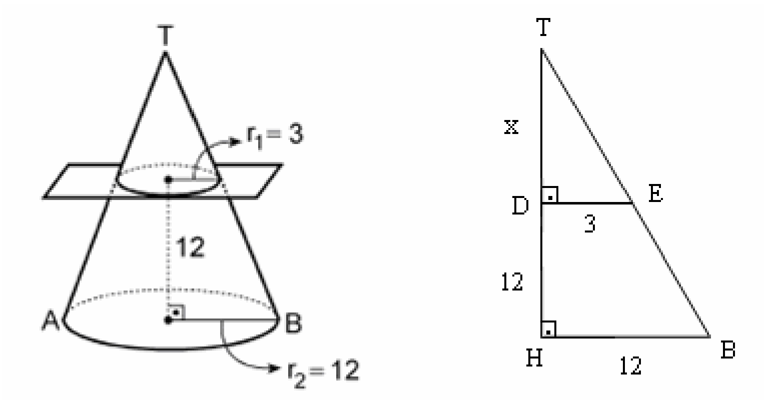


Elde edilen kesik koninin yüksekliği 12 cm, taban yarıçapları ise 3 cm ve 12 cm'dir.

Buna göre, koninin [TA] yanal ayrıtının uzunluğu kaç cm'dir?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

Çözüm 20



TDE ≅ THB $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{x+12} = \dfrac{3}{12}$ $\Rightarrow$ x = 4

THB dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

$|TB|^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow |TB| = 20$

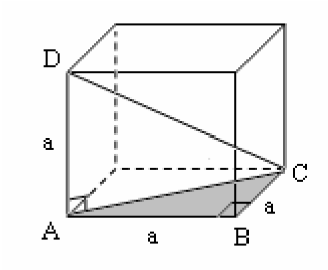
Buna göre, $|TA| = |TB| = 20$ bulunur.

21. Yarıçapı $3\sqrt{3}$ cm olan bir kürenin içine yerleştirilebilecek <u>en büyük</u> hacimli küpün hacmi kaç cm^3 tür?

A) 125 B) 216 C) 512 D) $81\sqrt{3}$ E) $108\sqrt{6}$

Çözüm 21

Kürenin içine yerleştirilebilecek küpün hacminin en büyük olması için :
Küpün en büyük uzunluğu, kürenin çapıyla aynı olmalıdır.



$|CD| = 6\sqrt{3}$

Küpün bir kenar uzunluğu = a olsun.

$AB \perp BC \quad \Rightarrow \quad$ ABC dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

$|AC|^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad |AC| = a\sqrt{2}$

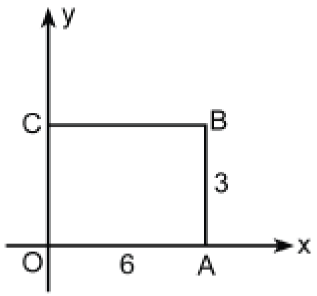
$AD \perp AC \quad \Rightarrow \quad$ DAC dik üçgeninde pisagor bağıntısına göre,

$|CD|^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad |CD| = a\sqrt{3}$

$a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ olacağına göre, a = 6 bulunur.

Küpün hacmi = $a^3 = 6^3 = 216$ cm^3 elde edilir.

22.



OABC bir dikdörtgen

$|OA| = 6$ birim

$|AB| = 3$ birim

Dik koordinat düzleminde verilen şekildeki OABC dikdörtgeninin

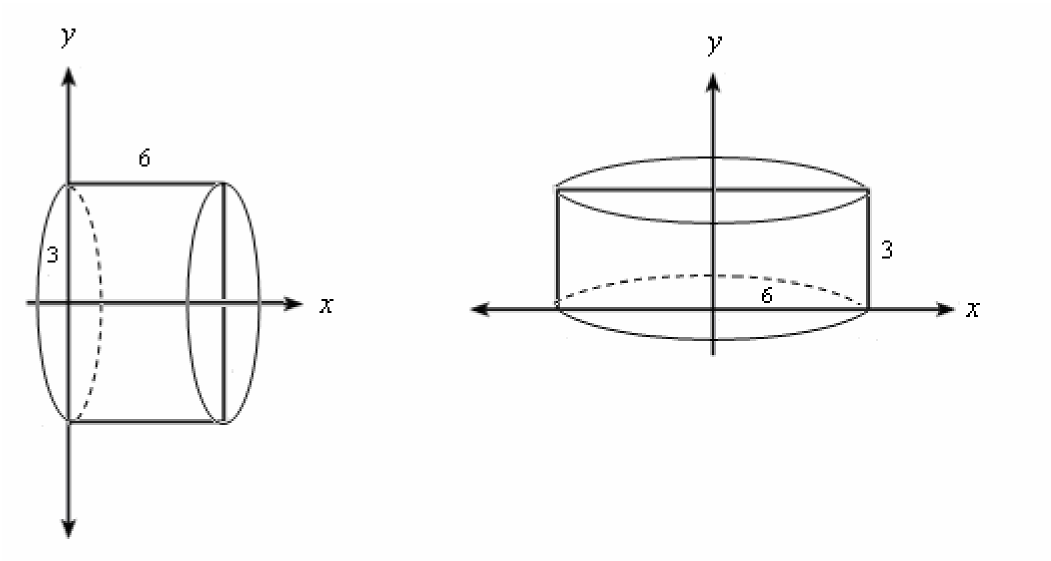
x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen silindirin hacmi V_x ,

y ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen silindirin hacmi de V_y olduğuna göre,

$\frac{V_x}{V_y}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 2 E) 3

Çözüm 22

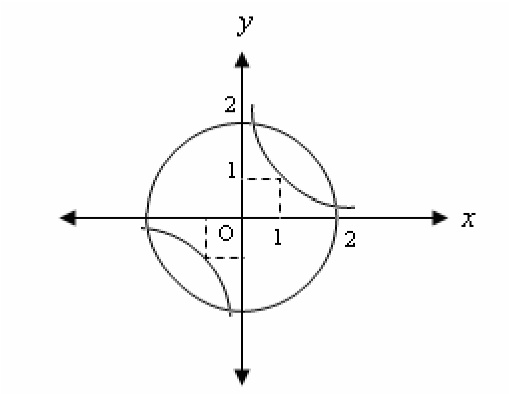


Buna göre, $\frac{V_x}{V_y} = \frac{\pi.3^2.6}{\pi.6^2.3} = \frac{1}{2}$ elde edilir.

23. $x^2 + y^2 = 4$ çemberi ile $x.y = 1$ hiperbolü kaç noktada kesişir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm 23



$x^2 + y^2 = 4$ çemberi ile $x.y = 1$ hiperbolünün kesişim noktaları ortak çözümden bulunur.

$x.y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{x}$

$x^2 + y^2 = 4$ çember denkleminde y yerine $\dfrac{1}{x}$ yazılırsa,

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

$x^2 = a$ olsun.

$a^2 - 4a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-4)^2 - 4.1.1 = 16 - 4 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 12$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{12}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{12}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$a_1 = 2+\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2+\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$a_2 = 2-\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2-\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$x^2 + y^2 = 4$ çember denkleminde veya $x.y = 1$ hiperbol denkleminde x değerlerini yerine yazarak y değerleri hesaplanır.

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$x.y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x}$$

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad (\sqrt{2+\sqrt{3}}\ ,\ \sqrt{2-\sqrt{3}}\,)$$

$$x_3 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y_3 = -\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad (-\sqrt{2+\sqrt{3}}\ ,\ -\sqrt{2-\sqrt{3}}\,)$$

$$x_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad (\sqrt{2-\sqrt{3}}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\,)$$

$$x_4 = -\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y_4 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad (-\sqrt{2-\sqrt{3}}\ ,\ -\sqrt{2+\sqrt{3}}\,)$$

Buna göre, $x^2 + y^2 = 4$ çemberi ile $x.y = 1$ hiperbolü 4 noktada kesişir.

24. Merkezi (3 , 4) noktası ve yarıçapı 4 birim olan çembere dıştan teğet olan 3 birim yarıçaplı çemberlerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + (y - 4)^2 = 16$

B) $(x - 3)^2 + y^2 = 36$

C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

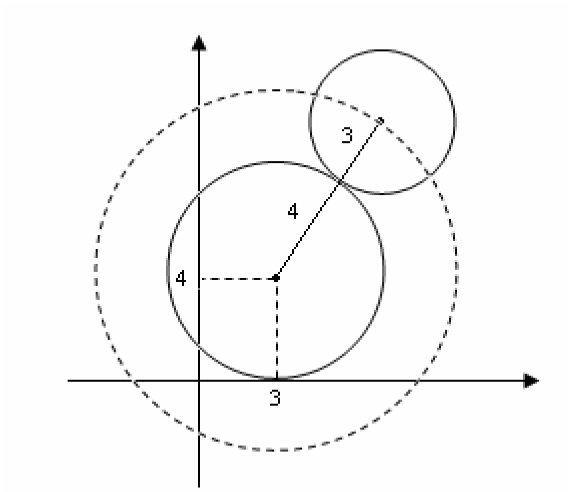
D) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

E) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$

Çözüm 24

Merkezi (3 , 4) noktası ve yarıçapı 4 birim olan çemberin denklemi :

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

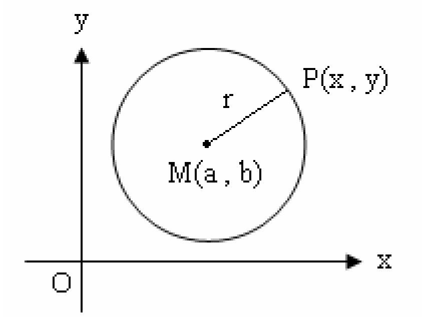


Merkezi (3 , 4) noktası ve yarıçapı 7 birim olan çemberin denklemi :

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 7^2 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$

Not : Çemberin Denklemi

Koordinat düzleminde sabit M(a , b) noktasından r uzaklıkta bulunan noktaların kümesi M(a , b) merkezli r yarıçaplı çember belirtir.



Çemberin denklemi çember üzerindeki noktaların apsisleri ile ordinatları arasındaki bağıntıdır.

$r = |MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Öyleyse

Merkezi M(a , b) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir.

Not : Geometrik Yer

Aynı özelliği taşıyan noktaların meydana getirdikleri şekil, bu noktaların geometrik yeridir. Analitik olarak geometrik yer aramak için bu noktaların ortak özelliğini belirten şeklin denklemini bulmak gerekir.

25. $4x^2 + y^2 - 8kx + 4my + 36 = 0$ denklemi,

aşağıda verilen k ve m değerlerinden hangisi için bir <u>elips</u> belirtir?

A) $k = 0$, $m = 2$ B) $k = 2$, $m = 3$ C) $k = -1$, $m = 1$

D) $k = -2$, $m = 0$ E) $k = -2$, $m = 1$

Çözüm 25

$4x^2 + y^2 - 8kx + 4my + 36 = 0$ denkleminin elips belirtmesi için :

$(4x^2 - 8kx) + y^2 + 4my + 36 = 0$

$(4x^2 - 8kx + 4k^2 - 4k^2) + y^2 + 4my + 36 = 0$

$(4x^2 - 8kx + 4k^2) - 4k^2 + (y^2 + 4my + 4m^2 - 4m^2) + 36 = 0$

$(4x^2 - 8kx + 4k^2) - 4k^2 + (y^2 + 4my + 4m^2) - 4m^2 + 36 = 0$

$(2x - 2k)^2 - 4k^2 + (y + 2m)^2 - 4m^2 + 36 = 0$

$(2x - 2k)^2 + (y + 2m)^2 = 4k^2 + 4m^2 - 36$

Karelerinin toplamı sıfırdan büyük olacağına göre,

$4k^2 + 4m^2 - 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + m^2 > 9$ olmalıdır.

A) $k = 0$ ve $m = 2$ için : $0^2 + 2^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad 4 > 9$

B) $k = 2$ ve $m = 3$ için : $2^2 + 3^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad 13 > 9$

C) $k = -1$ ve $m = 1$ için : $(-1)^2 + 1^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad 2 > 9$

D) $k = -2$ ve $m = 0$ için : $(-2)^2 + 0^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad 4 > 9$

E) $k = -2$ ve $m = 1$ için : $(-2)^2 + 1^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad 5 > 9$

Buna göre, $k = 2$, $m = 3$ için

$4x^2 + y^2 - 16x + 12y + 36 = 0$ denklemi elips belirtir.

26. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberi ile $y = mx + n$ $(m\ ,\ n \in \mathrm{R})$ doğrusu,

$(x_0\ ,\ y_0)$ ve $(x_1\ ,\ y_1)$ gibi iki farklı noktada kesişiyor.

$x_0 = -x_1$ ve $x_0 \neq 0$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>her zaman</u> doğrudur?

A) m = 1 B) n = – 1 C) m – n = 0 D) m + n = 0 E) m.n = 0

Çözüm 26

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberi ile $y = mx + n$ $(m\ ,\ n \in \mathrm{R})$ doğrusunun kesişim noktaları ortak çözümden hesaplanır.

$x^2 + y^2 = r^2$ çember denkleminde y yerine $mx + n$ yazalım.

$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$

$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 = r^2$

$(1 + m^2).x^2 + 2mn.x + (n^2 - r^2) = 0$

$\Delta = (2mn)^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)$

$$x_0 = \frac{-2mn + \sqrt{4m^2n^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)}}{2.(1 + m^2)} \text{ ve } x_1 = \frac{-2mn - \sqrt{4m^2n^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)}}{2.(1 + m^2)}$$

$x_0 = -x_1$ olduğuna göre,

$$\frac{-2mn + \sqrt{4m^2n^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)}}{2.(1 + m^2)} = -\left(\frac{-2mn - \sqrt{4m^2n^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)}}{2.(1 + m^2)}\right)$$

$$\frac{-2mn + \sqrt{4m^2n^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)}}{2.(1 + m^2)} = \frac{2mn + \sqrt{4m^2n^2 - 4.(1 + m^2).(n^2 - r^2)}}{2.(1 + m^2)}$$

$-2mn = 2mn$

$4mn = 0$

$mn = 0$ elde edilir.

27. $\overrightarrow{AB} = (4\ ,-2\ ,1)$

$\overrightarrow{AC} = (1\ ,5\ ,2)$

olduğuna göre, $\overrightarrow{BC}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3\ ,7\ ,1)$ B) $(-1\ ,7\ ,1)$ C) $(1\ ,-3\ ,3)$ D) $(1\ ,3\ ,3)$ E) $(7\ ,3\ ,3)$

Çözüm 27

I. Yol

$\overrightarrow{BC}$ vektörünü bulmak için, bitim noktasının koordinatlarından başlangıç noktasının koordinatları çıkarılır.
Buna göre,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = (1-4\ ,5-(-2)\ ,2-1\ )$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = (-3\ ,7\ ,1) \text{ elde edilir.}$$

II. Yol

$\vec{A} = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$

$\vec{B} = (b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3)$

$\vec{C} = (c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_3)$ olsun.

$$\overrightarrow{AB} = (4\ ,-2\ ,1) \quad \Rightarrow \quad (b_1 - a_1\ ,\ b_2 - a_2\ ,\ b_3 - a_3) = (4\ ,-2\ ,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1\ ,5\ ,2) \quad \Rightarrow \quad (c_1 - a_1\ ,\ c_2 - a_2\ ,\ c_3 - a_3) = (1\ ,5\ ,2)$$

$\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1\ ,\ c_2 - b_2\ ,\ c_3 - b_3)$ olacağına göre,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1-4\ ,5-(-2)\ ,2-1\ ) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = (-3\ ,7\ ,1) \text{ elde edilir.}$$

Not :

$\vec{A} = (x_1 , y_1 , z_1)$

$\vec{B} = (x_2 , y_2 , z_2)$

vektörleri için $\overrightarrow{AB}$ vektörünü bulmak için,

bitim noktasının koordinatlarından başlangıç noktasının koordinatları çıkarılır.

Buna göre, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$ olur.

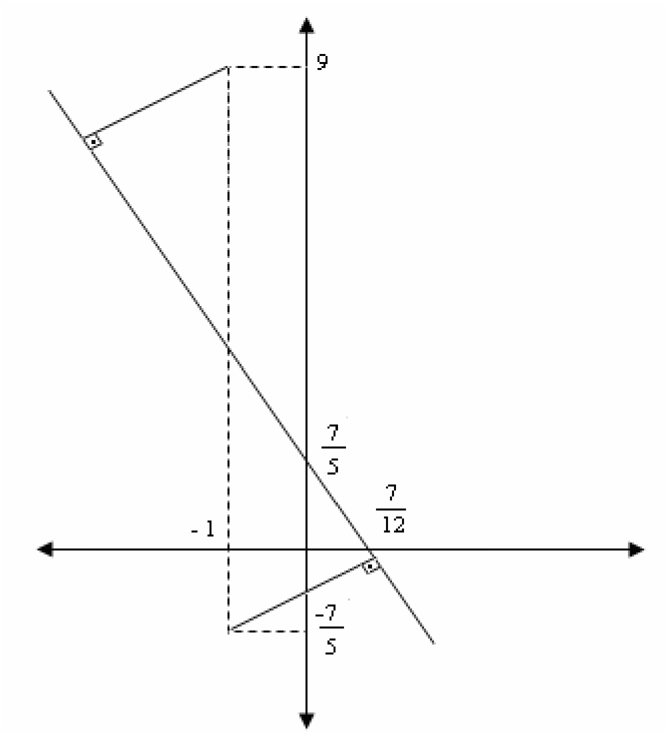
28. A(– 1 , a) noktasının 12x + 5y – 7 = 0 doğrusuna olan uzaklığı 2 birim olduğuna göre, a'nın alabileceği değerlerin <u>çarpımı</u> kaçtır?

A) $\dfrac{-61}{5}$ B) $\dfrac{-63}{5}$ C) $\dfrac{-57}{6}$ D) $\dfrac{-53}{6}$ E) $\dfrac{-49}{8}$

Çözüm 28

$12x + 5y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ için} : y = \dfrac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad (0\,,\, \dfrac{7}{5})$

$\Rightarrow \quad y = 0 \text{ için} : x = \dfrac{7}{12} \quad \Rightarrow \quad (\dfrac{7}{12}\,,\, 0)$



Bir noktanın bir doğruya uzaklığından,

A(– 1 , a)

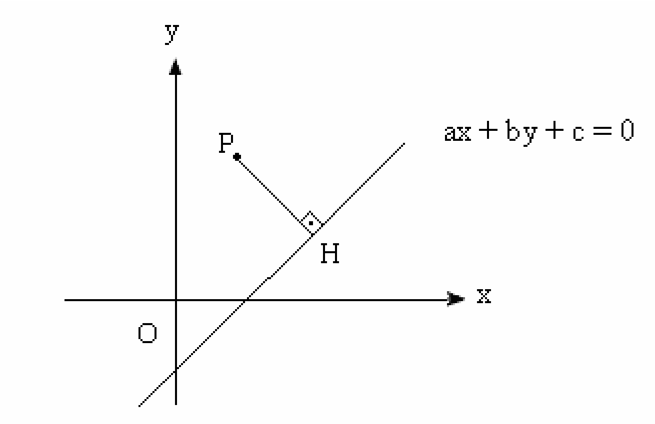
$2 = \dfrac{|12.(-1) + 5.a - 7|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \quad \Rightarrow \quad |5a - 19| = 26 \quad \Rightarrow \quad 5a - 19 = 26 \quad \Rightarrow \quad a = 9$

$\Rightarrow \quad -5a + 19 = 26 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{-7}{5}$

Buna göre, a'nın alabileceği değerlerin çarpımı = $9.(\dfrac{-7}{5}) = \dfrac{-63}{5}$ elde edilir.

Not : Bir noktanın bir doğruya uzaklığı

P(x_1 , y_1) noktasının ax + by + c = 0 doğrusuna uzaklığı,



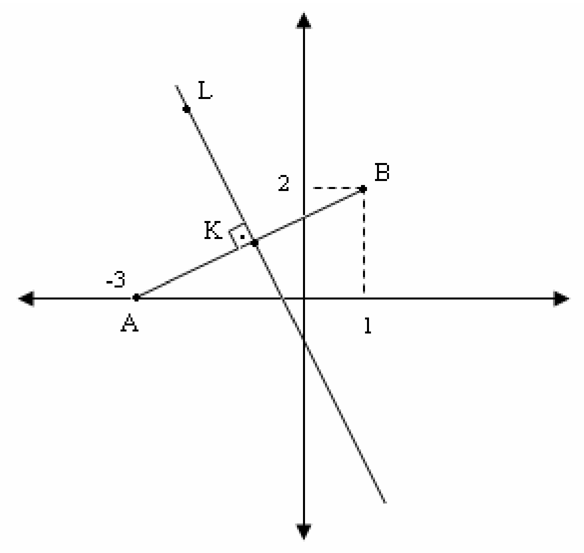
$\Rightarrow \quad |PH| = d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dir.

29. Analitik düzlemde A(– 3 , 0) ve B(1 , 2) noktaları için [AB] doğru parçasının orta dikmesinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) y + 2x + 1 = 0 B) y + 2x – 1 = 0 C) y – 2x + 2 = 0

D) 2y + x – 1 = 0 E) 2y + 2x – 1 = 0

Çözüm 29



A(– 3 , 0) ve B(1 , 2) noktaları için iki noktası bilinen doğrunun eğimine göre,

$$m_{AB} = \frac{2-0}{1-(-3)} \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = \frac{1}{2}$$

[AB] doğru parçasının orta noktası K(x , y) olsun.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1 \\ \\ y = \dfrac{0+2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 1 \end{array}\right\} \text{K}(x\,,\,y) = \text{K}(-1\,,\,1) \text{ olur.}$$

[AB] doğru parçası ile orta dikmesi olan [KL] doğrusunun eğimleri çarpımı – 1 dir.

$$m_{AB}.m_{KL} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}.m_{KL} = -1 \quad \Rightarrow \quad m_{KL} = -2$$

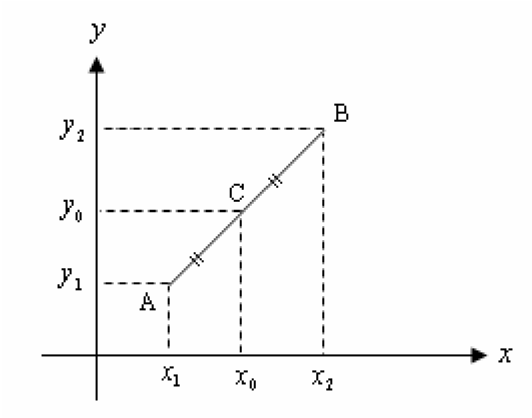
Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denklemine göre,

y – 1 = – 2.(x – (– 1)) ⇒ y – 1 = – 2x – 2 ⇒ y + 2x + 1 = 0 elde edilir.

Not : İki Noktası Bilinen Doğrunun Eğimi

A(x_1 , y_1) ve B(x_2 , y_2) $\Rightarrow$ m = $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Not : Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

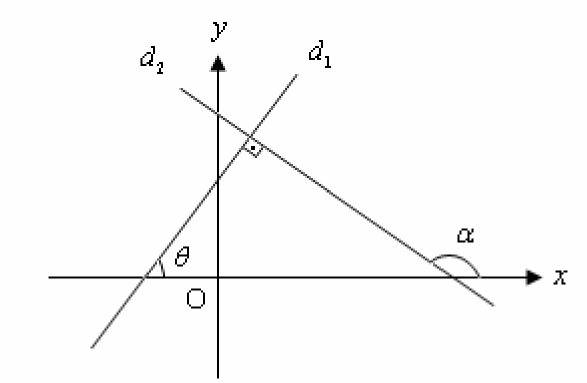


A(x_1 , y_1) ve B(x_2 , y_2) olmak üzere [AB] nin orta noktası C(x_0 , y_0) olsun.

A x_1 x_2 B yamuğunda $\Rightarrow$ $y_0 = \dfrac{y_2 + y_1}{2}$

A y_1 y_2 B yamuğunda $\Rightarrow$ $x_0 = \dfrac{x_2 + x_1}{2}$

Not : İki Doğrunun Diklik Koşulu



d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \tan\theta$

d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan\alpha$

$m_2 = \tan\alpha$

$m_2 = \tan(90+\alpha) \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\cot\theta$

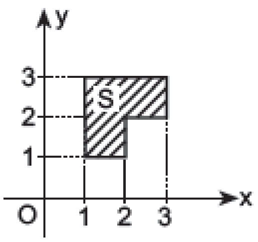
$\Rightarrow \quad m_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\Rightarrow \quad m_2 = -\dfrac{1}{m_1} \quad \Rightarrow \quad m_1.m_2 = -1$ bulunur.

Not : Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

A(x_1 , y_1) ve eğim : m $\quad \Rightarrow \quad$ m = $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} \quad \Rightarrow \quad y-y_1 = m.(x-x_1)$

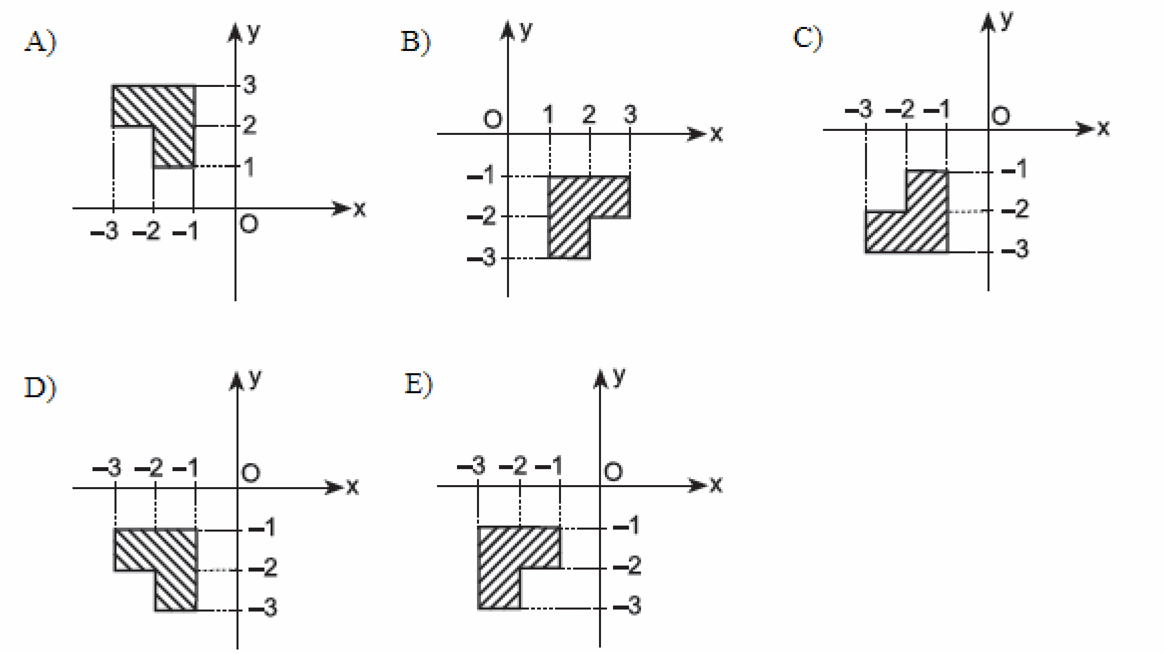
30. S kümesi, aşağıdaki grafikte taralı olan bölgedeki (x , y) sıralı ikililerinden oluşmaktadır.



Buna göre

T = {(x , y) ∈ R^2 : (– x , – y) ∈ S}

biçiminde tanımlanan kümenin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Çözüm 30

$T = \{(x , y) \in R^2 : (- x , - y) \in S\}$

$(1 , 1) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 1 , - 1) \in T$

$(1 , 2) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 1 , - 2) \in T$

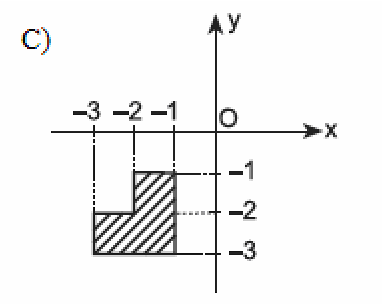
$(1 , 3) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 1 , - 3) \in T$

$(2 , 1) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 2 , - 1) \in T$

$(2 , 2) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 2 , - 2) \in T$

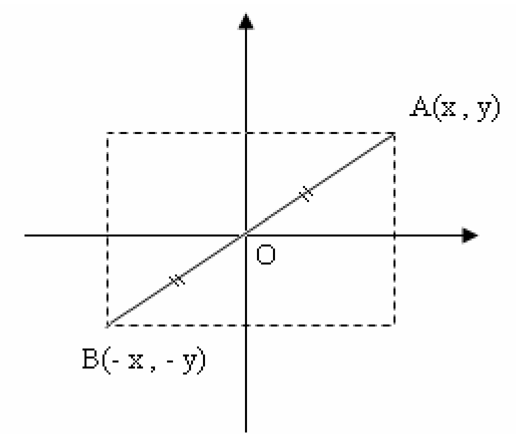
$(3 , 2) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 3 , - 2) \in T$

$(3 , 3) \in S \quad \Rightarrow \quad (- 3 , - 3) \in T$



Not : Analitik Düzlemde Orijine Göre Simetri

A(x , y) noktasının O(0 , 0) noktasına göre simetriği B(– x , – y) dir.



Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA