

Lisans Yerleřtirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 19 Haziran 2010

Matematik Soruları ve Çözümleri

1. $(3x - 1)(x + 1) + (3x - 1)(x - 2) = 0$ eşitliğini sağlayan x gerçel sayılarının toplamı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{6}$

Çözüm 1

$$(3x - 1)(x + 1) + (3x - 1)(x - 2) = 0$$

$$(3x - 1) \cdot [(x + 1) + (x - 2)] = 0$$

$$(3x - 1)[x + 1 + x - 2] = 0$$

$$(3x - 1)(2x - 1) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

$$x \text{ gerçel sayılarının toplamı} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

veya

$$(3x - 1)(2x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{kökler toplamı} : x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{6} = \frac{5}{6}$$

Not : İkinci Derece Denkleminin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki Bağlılıklar

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

$$\text{kökler toplamı} : x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. $f(x) = \frac{(1+x+x^2+x^3).(1-x)^2}{1-x-x^2+x^3}$ olduğuna göre, $f(\sqrt{2})$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm 2

I. Yol

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1+x+x^2+x^3).(1-x)^2}{1-x-x^2+x^3} = \frac{[(1+x)+(x^2+x^3)].(1-x)^2}{(1-x)-(x^2-x^3)} \\ &= \frac{[(1+x)+x^2.(1+x)](1-x)^2}{(1-x)-x^2.(1-x)} = \frac{[(1+x).(1+x^2)].(1-x)^2}{(1-x).(1-x^2)} = \frac{[(1+x).(1+x^2)].(1-x)^2}{(1-x).(1-x).(1+x)} = 1+x^2 \end{aligned}$$

$f(x) = 1+x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ olduğuna göre,

$f(\sqrt{2}) = 1+(\sqrt{2})^2 = 1+2 = 3$ elde edilir.

II. Yol

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1+x+x^2+x^3).(1-x)^2}{1-x-x^2+x^3} \\ &= \frac{(1+x+x^2+x^3).(1-x).(1-x)}{1-x-(x^2-x^3)} = \frac{(1-x^4).(1-x)}{(1-x)-x^2.(1-x)} = \frac{(1-x^4).(1-x)}{(1-x).(1-x^2)} = \frac{(1-x^4)}{(1-x^2)} \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{1-x^4}{1-x^2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ olduğuna göre,

$f(\sqrt{2}) = \frac{1-(\sqrt{2})^4}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-4}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$ elde edilir.

Not :

$$\begin{aligned} 1-x^4 &= (1-x^2).(1+x^2) \\ &= (1-x).(1+x).(1+x^2) \\ &= (1-x).(x^3+x^2+x+1) \end{aligned}$$

3. $(2x - 1)(4x^2 - 1) < 0$

eşitsizliğinin gerçel sayılardaki çözüm kümesi aşağıdaki açık aralıkların hangisidir?

A) $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ B) $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ C) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Çözüm 3

$$(2x - 1)(4x^2 - 1) < 0$$

$$(2x - 1)(2x - 1)(2x + 1) < 0$$

$$(2x - 1)^2 \cdot (2x + 1) < 0$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$(2x - 1)^2$	+++	+++++	+++
$2x + 1$	---	+++++	+++
$(2x - 1)^2 \cdot (2x + 1)$	---	+++++	+++
	< 0		

Çözüm kümesi = $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ olur.

Not :

$f(x) = A(x).B(x).C(x)$ biçimindeki ifadelerde;

çarpanların her biri ayrı ayrı sifıra eşitlenip kökler bulunur.

$A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ in en büyük üslüleri alınıp çarpılır.

Elde edilen ax^n ifadesinde; a nın işaretinin aynı, en sağa ($+\infty$ tarafa) yazılır.

Sola doğru her köke rastladıkça işaret değiştirilerek tablo işaretlenir.

(Çift katlı köke rastlandığında işaret değişmez.)

4. b ve 40 sayılarının en küçük ortak katı 120 ' dir.

Buna göre, kaç farklı b pozitif tam sayısı vardır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

Çözüm 4

I. Yol

$$\text{Okek}(b, 40) = 120$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

b sayısında 3 çarpanı olacağına göre,

$$b = 3$$

$$b = 2 \cdot 3, \quad b = 2^2 \cdot 3, \quad b = 2^3 \cdot 3$$

$$b = 3 \cdot 5,$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Buna göre, 8 farklı b pozitif tam sayısı vardır.

II. Yol

$$\text{Okek}(b, 40) = 120$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

b sayısında 3 çarpanı olacağına göre, b = 3.?

$$120 = 3 \cdot 40 \Rightarrow 40 = 2^3 \cdot 5^1$$

$$40 \text{ in pozitif bölenleri sayısı : } (3 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8$$

Not : Ortak katların en küçüğü (okek)

Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.

Ortak asal çarpanların en büyük üslüleri (üsler eşitse biri) ile ortak olmayanlar alınır ve çarpılır.

Not :

Bir sayının pozitif bölen sayısını bulmak için o sayı asal çarpanlarına ayrılır ve üslerinin birer fazlası alınıp çarpılır.

a, b, c birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere A doğal sayısı $A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ biçiminde ise A 'nın $(m + 1) \cdot (n + 1) \cdot (p + 1)$ tane pozitif böleni vardır.

5. $f(x) = \sqrt{2 - |x + 3|}$ fonksiyonunun tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3 \leq x \leq 5$ B) $-1 \leq x \leq 5$ C) $-3 \leq x \leq 4$ D) $-3 \leq x \leq 0$ E) $-5 \leq x \leq -1$

Çözüm 5

$$2 - |x + 3| \geq 0 \Rightarrow |x + 3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x + 3 \leq 2 \Rightarrow -5 \leq x \leq -1$$

Not : n çift olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

6. Gerçel sayılardan gerçel sayıların bir K alt kümesine tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} -x + 8, & x < 3 \text{ ise} \\ x + 2, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu örten olduğuna göre, K kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[3, \infty)$ B) $[5, \infty)$ C) $[3, 5]$ D) $(-\infty, 5)$ E) $(-\infty, 3)$

Çözüm 6

$f : \mathbb{R} \rightarrow K \subset \mathbb{R}$ ve $f(x)$ fonksiyonu örten olduğuna göre,

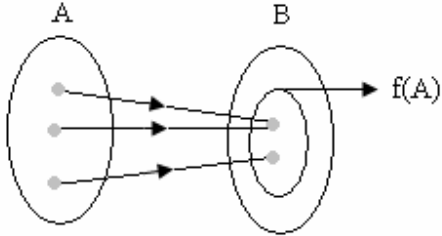
$$x < 3 \text{ ise } -x > -3 \Rightarrow -x + 8 > -3 + 8 \Rightarrow -x + 8 > 5$$

$$x \geq 3 \text{ ise } x + 2 \geq 3 + 2 \Rightarrow x + 2 \geq 5$$

Buna göre, K kümesi = $[5, \infty)$

Not : Örten Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda $f(A) = B$ ise f , örten fonksiyondur.



7. Verilen a, c pozitif ve b negatif gerçel sayıları için

$$a^2b > abc + c^2$$

eşitsizliği sağlandığına göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) $a = |b|$ B) $a = c$ C) $c > |b|$ D) $a < c$ E) $c < a$

Çözüm 7

$$a^2b > abc + c^2 \Rightarrow a^2b - abc > c^2 \Rightarrow ab(a - c) > c^2$$

$$ab(a - c) > c^2$$

a pozitif b negatif gerçel sayı olduğuna göre, $ab < 0$ olur.

$ab(a - c) > c^2 > 0$ olacağından ve c gerçel sayısı da pozitif olduğundan,

$$a - c < 0 \Rightarrow a < c$$

Fakat

Verilen a, c pozitif ve b negatif gerçel sayıları için

$a = 1$, $c = 2$ ve $b = -1$ olsun.

$$a^2b > abc + c^2 \Rightarrow 1^2 \cdot (-1) > 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 2^2 \Rightarrow -1 > 2 \text{ sonucu elde edilir.}$$

Buna göre, soru hatalıdır.

8. Rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $*$, \oplus , \otimes ikili işlemleri

$$\text{I. } a * b = a - b$$

$$\text{II. } a \oplus b = a + b + ab$$

$$\text{III. } a \otimes b = \frac{a + b}{5}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, bu işlemlerden hangileri birleşme özeliğini sağlar?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

Çözüm 8

I. $a * b = a - b$

$$a * (b * c) = (a * b) * c \Rightarrow a * (b - c) = (a - b) * c$$

$$a - (b - c) = a - b - c \Rightarrow a - b + c = a - b - c \text{ olduğuna göre,}$$

* işlemleri birleşme özelliğini sağlamaz.

II. $a \oplus b = a + b + ab$

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \Rightarrow a \oplus (b + c + bc) = (a + b + ab) \oplus c$$

$$a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c$$

$$a + b + c + ab + ac + bc + abc = a + b + c + ab + ac + bc + abc \text{ olduğuna göre,}$$

\oplus işlemleri birleşme özelliğini sağlar.

III. $a \otimes b = \frac{a+b}{5}$

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c \Rightarrow a \otimes \left(\frac{b+c}{5}\right) = \left(\frac{a+b}{5}\right) \otimes c$$

$$\frac{a + \frac{b+c}{5}}{5} = \frac{\frac{a+b}{5} + c}{5} \Rightarrow 5a + b + c = a + b + 5c \text{ olduğuna göre,}$$

\otimes işlemleri birleşme özelliğini sağlamaz.

9. $P(x) = 2x^3 - (m + 1)x^2 - nx + 3m - 1$ polinomu $x^2 - x$ ile tam bölünebildiğine göre,

$m - n$ kaçtır?

- A) $\frac{-1}{3}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

Çözüm 9

I. Yol

Bölünen = Bölen \times Bölüm + Kalan

$$P(x) = (x^2 - x).B(x) + \text{kalan} \Rightarrow \text{kalan} = 0$$

$x^2 - x = x.(x - 1)$ olduğundan,

$P(x)$ polinomunun hem x hem de $x - 1$ ile de tam bölünebilmesi gerekir.

O halde,

$x = 0$ için, $P(0) = 0$ ve

$x - 1 = 0$ için, $x = 1 \Rightarrow P(1) = 0$ olmalıdır.

$$P(x) = 2x^3 - (m + 1)x^2 - nx + 3m - 1$$

$$P(0) = 2.0 - (m + 1).0 - n.0 + 3m - 1 = 0 \Rightarrow 3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$P(x) = 2x^3 - \left(\frac{1}{3} + 1\right)x^2 - nx + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow P(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 - nx$$

$$P(1) = 2.1^3 - \frac{4}{3}.1^2 - n.1 = 0 \Rightarrow 2 - \frac{4}{3} - n = 0 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$$

Buna göre, $m - n = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$ elde edilir.

II. Yol

Kalan = 0 olacağına göre,

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = x$$

P(x) polinomunda x^2 yerine x yazılırsa, bu polinomun $(x^2 - x)$ ile bölümündeki kalan bulunur.

$$P(x) = 2x^3 - (m + 1)x^2 - nx + 3m - 1$$

$$\text{Kalan} = 2x - (m + 1)x - nx + 3m - 1 = 0$$

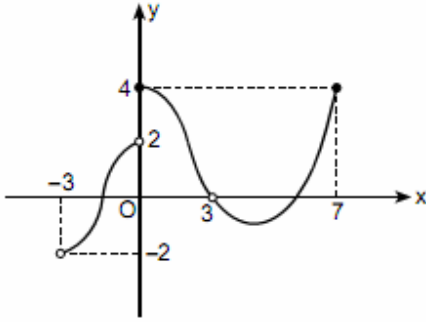
$$(2 - (m + 1) - n).x + 3m - 1 = 0$$

$$3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$1 - m - n = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} - n = 0 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$$

Buna göre, $m - n = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$ elde edilir.

10.

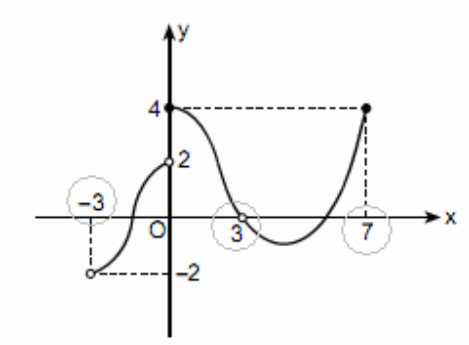


Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-3, 0) \cup [4, 7)$ B) $(-3, 0) \cup (3, 7]$ C) $[-3, 2] \cup (3, 7)$
D) $(-3, 3) \cup (3, 7]$ E) $[-3, 2) \cup (4, 7]$

Çözüm 10

Parçalı fonksiyonun tanım aralığı x eksenindeki değerlere göre incelendiğinden,



$x = -3$ için tanımlı değil

$x = 3$ için tanımlı değil

$x = 7$ için tanımlı

Tanım kümesi = $(-3, 3) \cup (3, 7]$

11. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & \sin x \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & \sin x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

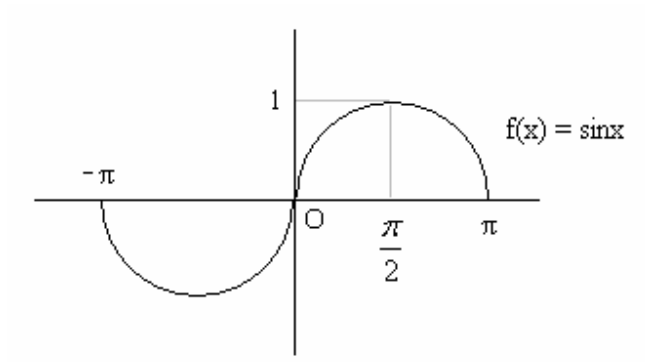
biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre $(-\pi, \pi)$ açık aralığının f altındaki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-2, 2]$ B) $(-1, 2)$ C) $[0, 1]$ D) $(0, 2)$ E) $[0, 2]$

Çözüm 11

$$(-\pi, \pi) = (-\pi, 0) \cup [0, \pi)$$



$$(-\pi, 0) \rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$[0, \pi) \rightarrow \sin x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2\sin x$$

$$0 \leq x < \pi$$

$$0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sin 0 \leq \sin x \leq \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\sin 0 \leq 2\sin x \leq 2\sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$$

Buna göre, görüntü kümesi : $[0, 2]$ elde edilir.

12. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

permütasyonları için $g(f^{-1}(2))$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm 12

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(4) = 1 \text{ elde edilir.}$$

13. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x^2 - x + 2$ olduğuna göre, $f(3)$ değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 11

Çözüm 13

$$\frac{x-1}{x+1} = 3 \Rightarrow x-1 = 3x+3 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$x = -2$ ise

$$f\left(\frac{-2-1}{-2+1}\right) = (-2)^2 - (-2) + 2 \Rightarrow f(3) = 8 \text{ elde edilir.}$$

14. $f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, her $x > 0$ için $f(x) \geq 0$ özelliğini sağlayan en küçük m değeri kaçtır?

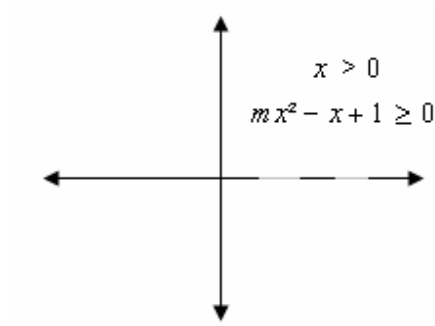
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm 14

I. Yol

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow mx - 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{mx^2 - x + 1}{x} \geq 0$$

her $x > 0$ için, $mx^2 - x + 1 \geq 0$



$x > 0$ için $f(x) \geq 0$ olduğuna göre fonksiyonun grafiği I. bölgede olur.

$mx^2 - x + 1 \geq 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçel kökü olmayacağından ,

$\Delta \leq 0$ olmalıdır.

$$(-1)^2 - 4.m.1 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 4m \Rightarrow m \geq \frac{1}{4}$$

II. Yol

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow mx - 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{mx^2 - x + 1}{x} \geq 0$$

her $x > 0$ için, $mx^2 - x + 1 \geq 0$

$$mx^2 - x + 1 \geq 0 \Rightarrow m \cdot \left(x^2 - \frac{x}{m} + \frac{1}{m}\right) \geq 0 \quad (m \neq 0)$$

$$x^2 - \frac{x}{m} + \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{2m}\right)^2 - \left(\frac{1}{2m}\right)^2 \geq 0$$

$$x^2 - \frac{x}{m} + \left(\frac{1}{2m}\right)^2 + \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{2m}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2m}\right)^2 \geq \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{m}$$

$$\left(x - \frac{1}{2m}\right)^2 \geq \frac{1 - 4m}{4m^2}$$

$$x - \frac{1}{2m} \geq \mp \frac{\sqrt{1 - 4m}}{2m}$$

$$x \geq \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4m}}{2m}$$

$mx^2 - x + 1 \geq 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçel kökü olamayacağından ,

$$1 - 4m \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 4m \Rightarrow m \geq \frac{1}{4}$$

15. $P(x)$ üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonu olmak üzere,

$$P(-4) = P(-3) = P(5) = 0$$

$$P(0) = 2$$

olduğuna göre, $P(1)$ kaçtır?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{8}{5}$

Çözüm 15

$P(-4) = P(-3) = P(5) = 0$ olduğuna göre, $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$ ise

$$P(x) = a.(x - (-4)).(x - (-3)).(x - 5) \Rightarrow P(x) = a.(x + 4).(x + 3).(x - 5)$$

$P(0) = 2$ verildiğine göre,

$$P(0) = a.(0 + 4).(0 + 3).(0 - 5) \Rightarrow 2 = a.(-60) \Rightarrow a = \frac{-1}{30}$$

$$P(x) = \frac{-1}{30}.(x + 4).(x + 3).(x - 5) \text{ elde edilir.}$$

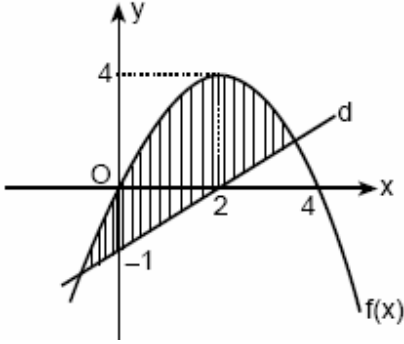
$$P(1) = \frac{-1}{30}.(1 + 4).(1 + 3).(1 - 5) \Rightarrow P(1) = \frac{-1}{30} \cdot (-80) = \frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

Not : Kökleri verilen denklemin yazılışı

Kökleri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ olan n. dereceden bir denklem, $a \neq 0$ olmak üzere

$a.(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0$ şeklinde yazılabilir.

16.



Yukarıdaki dik koordinat düzleminde $f(x)$ parabolü ve d doğrusu gösterilmiştir.

Buna göre, taralı bölge aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözüm kümesidir?

$$\left. \begin{array}{l} \text{A) } y - x^2 + 2x \leq 0 \\ y - x + 2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{B) } y - x^2 + 2x \geq 0 \\ 2y - x + 2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{C) } y - x^2 + 4x \leq 0 \\ 2y - x + 2 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{D) } y + x^2 - 4x \leq 0 \\ 2y - x + 4 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{E) } y + x^2 - 4x \leq 0 \\ 2y - x + 2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Çözüm 16

(2 , 0) ve (0 , - 1) noktasından geçen d doğrusunun denklemi,

$$\text{İki noktası bilinen doğru denklemine göre, } \frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-2}{0-2} \Rightarrow 2y - x + 2 = 0$$

Orijinden ve (4 , 0) noktasından geçen f(x) parabolünün denklemi,

$$y = a.(x - x_1).(x - x_2) \Rightarrow x_1 = 0 , x_2 = 4$$

$$y = a.(x - 0).(x - 4) \Rightarrow y = a.x.(x - 4)$$

$$(2 , 4) \text{ noktası parabol üzerinde olduğuna göre, } 4 = a.2.(x - 4) \Rightarrow a = -1$$

$$y = (-1).x.(x - 4) \Rightarrow y = -x^2 + 4x \Rightarrow y + x^2 - 4x = 0$$

Buna göre,

$2y - x + 2 \geq 0$ eşitsizliğinde (1 , 0) noktasının koordinatları yazılırsa $1 \geq 0$ önermesi elde edilir.

Eşitsizliği sağlayan bölge (1 , 0) in bulunduğu taralı bölgedir.

d doğrusu bu düzleme dahildir.

$y + x^2 - 4x \leq 0$ eşitsizliğinde (1 , 0) noktasının koordinatları yazılırsa $-3 \leq 0$ önermesi elde edilir.

Eşitsizliği sağlayan bölge (1 , 0) in bulunduğu taralı bölgedir.

f(x) parabolü bu düzleme dahildir.

Not : İki noktası bilinen doğru denklemi

$$A(x_1 , y_1) \text{ ve } B(x_2 , y_2) \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

Not : Doğrunun eksen parçaları türünden denklemi

$$(a , 0) \text{ ve } (0 , b) \text{ noktalarından geçen doğrunun denklemi} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

17. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{-2, -1, 0\}$ olmak üzere $A \times B$ Kartezyen çarpım kümesinden alınan herhangi bir (a, b) elemanı için $a + b$ toplamının sıfır olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{2}{7}$

Çözüm 17

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{-2, -1, 0\}$$

$$A \times B = \{1, 2, 3, 4\} \times \{-2, -1, 0\}$$

Kartezyen çarpımının elemanları :

$$(1, -2), (1, -1), (1, 0),$$

$$(2, -2), (2, -1), (2, 0),$$

$$(3, -2), (3, -1), (3, 0),$$

$$(4, -2), (4, -1), (4, 0)$$

$$\text{Kartezyen çarpımının eleman sayısı : } 4 \times 3 = 12$$

$$\text{Tüm seçim sayısı} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 1 = 0 \text{ ve } 2 - 2 = 0$$

$$(1, -1), (2, -2)$$

$$\text{İstenen seçim sayısı} = 2$$

$$\text{İstenen olasılık} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

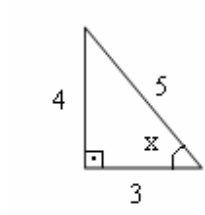
$$\text{Not : İstenen olasılık} = \frac{\text{istenen secim sayisi}}{\text{tüm secim sayisi}}$$

18. $3\sin x - 4\cos x = 0$ olduğuna göre, $|\cos 2x|$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{7}{25}$ E) $\frac{9}{25}$

Çözüm 18

$$3\sin x - 4\cos x = 0 \Rightarrow 3\sin x = 4\cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}$$



$$|\cos 2x| = |2\cos^2 x - 1| = |2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1| = |2 \cdot \frac{9}{25} - 1| = \left|\frac{18}{25} - 1\right| = \left|\frac{-7}{25}\right| = \frac{7}{25}$$

Not :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

19. $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos x} + 2 \sin x$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{\cos x}$ B) $\frac{1}{\sin x}$ C) 1 D) $\arcsin x$ E) $\arccos x$

Çözüm 19

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos x} + 2 \sin x \\ &= \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x}{\cos x} + 2 \sin x \\ &= \frac{1 - \sin 2x}{\cos x} + 2 \sin x \\ &= \frac{1 - \sin 2x + 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x} \\ &= \frac{1 - \sin 2x + \sin 2x}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Not :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

20. $\frac{\tan 60^\circ}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm 20

$$\begin{aligned} & \frac{\tan 60^\circ}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sin(60 - 20)}{\cos 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 20 \cdot \cos 20} = \frac{2 \cdot \sin 40}{\cos 60 \cdot \sin 40} = \frac{2}{\cos 60} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \end{aligned}$$

Not : İki Açının Toplamının / Farkının Trigonometrik Değerleri

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$\text{Not : } \sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

21. $\frac{1 + \cos 40^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 35^\circ}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos 20^\circ$ B) $2\cos 20^\circ$ C) $4\cos 20^\circ$ D) $\cos 40^\circ$ E) $2\cos 40^\circ$

Çözüm 21

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \cos 40^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 35^\circ} \\ &= \frac{1 + \cos 2 \cdot 20}{\frac{1}{2} \cdot [\cos(55 + 35) + \cos(55 - 35)]} \\ &= \frac{1 + 2 \cdot \cos^2 20 - 1}{\frac{1}{2} \cdot [\cos 90 + \cos 20]} = \frac{2 \cdot \cos^2 20}{\frac{1}{2} \cdot [0 + \cos 20]} = \frac{4 \cdot \cos^2 20}{\cos 20} = 4 \cdot \cos 20 \end{aligned}$$

Not : Ters Dönüşüm Formülleri

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

Not : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

22. Karmaşık sayılar düzleminde

$|z - 1| = |z + 2|$ denklemi aşağıdakilerden hangisini belirtir?

A) $x = 1$ doğrusu

B) $x = \frac{-1}{2}$ doğrusu

C) $x = 2$ doğrusu

D) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ çemberi

E) $x^2 + (y + 2)^2 = 1$ çemberi

Çözüm 22

$z = x + i.y$ olsun.

$$|x + i.y - 1| = |x + i.y + 2|$$

$$|(x - 1) + i.y| = |(x + 2) + i.y|$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ doğrusu}$$

Not : Karmaşık sayının mutlak değeri (modülü)

$$z = a + b.i \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

23. \bar{z} ile z 'nin eşleniği gösterildiğine göre, $z = 2 + i$ karmaşık sayısı için

$\frac{z}{\bar{z}-1}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ B) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}i$ C) $1 + 3i$ D) $2 - 3i$ E) $3 + i$

Çözüm 23

$$z = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$$

$$\frac{z}{\bar{z}-1} = \frac{2+i}{2-i-1} = \frac{2+i}{1-i}$$

$$\frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(2+i).(1+i)}{(1-i).(1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} \Rightarrow i^2 = -1 \text{ olduğuna göre,}$$

$$= \frac{2+3i-1}{1-(-1)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

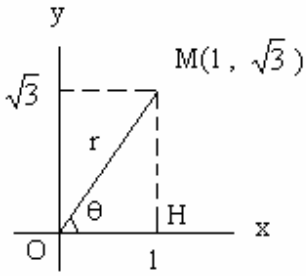
Not : Karmaşık Sayının Eşleniği

$z = a + bi$ karmaşık sayısı için $\bar{z} = a - bi$ sayısına z nin eşleniği denir.

24. $z = 1 + i\sqrt{3}$ karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ B) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ C) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
D) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ E) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Çözüm 24



$$z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ya da } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi \text{ bulunur.}$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow 1 > 0 \text{ ve } \sqrt{3} > 0 \text{ ise 1. bölgededir.}$$

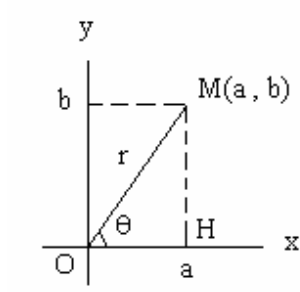
1. bölgede olduğundan, $\theta = \frac{\pi}{3}$ olur.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 2\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow z = 2\cos\frac{\pi}{3} + i.2\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Not : Bir karmaşık sayının kutupsal (trigonometrik) biçimde yazılması



$z = a + b.i$ karmaşık sayısının düzlemdeki görüntüsü $M(a, b)$ ve $|OM| = r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

OMH dik üçgeninde,

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r.\sin\theta$$

Bu değerler $z = a + b.i$ ' de yerine yazılırsa

$$z = r.\cos\theta + r.\sin\theta.i$$

$$z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta) \text{ elde edilir.}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ koşuluna uyan θ açısına z nin esas argümenti denir.

$\text{Arg}z = \theta$ biçiminde yazılır.

25. b ve c gerçel sayılar olmak üzere,

$P(x) = x^2 + bx + c$ polinomunun bir kökü $3 - 2i$ karmaşık sayıdır.

Buna göre, $P(-1)$ kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 30

Çözüm 25

$P(x) = x^2 + bx + c$ polinomunun bir kökü $x_1 = 3 - 2i$ ise diğer kökü $x_2 = 3 + 2i$ dir.

$$x_1 + x_2 = (3 - 2i) + (3 + 2i) = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13$$

$P(x) = x^2 + bx + c$ polinomunda

$$\text{kökler toplamı : } x_1 + x_2 = -\frac{b}{1} = -b = -6$$

$$\text{kökler çarpımı : } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{1} = c = 13$$

$$P(x) = x^2 + bx + c = x^2 - 6x + 13 \quad \Rightarrow \quad P(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 13 = 20$$

Not : İkinci Derece Denkleminin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki Bağlılıklar

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

$$\text{kökler toplamı : } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{kökler çarpımı : } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

26. $\log_3 5 = a$ olduğuna göre, $\log_5 15$ 'in değeri kaçtır?

- A) $\frac{a}{a+1}$ B) $\frac{a+1}{a}$ C) $\frac{a}{a+3}$ D) $\frac{a+3}{a}$ E) $\frac{4a}{3}$

Çözüm 26

$$\log_5 15 = \log_5 (3 \cdot 5) = \log_5 5 + \log_5 3$$

$$\log_5 5 = 1$$

$$\log_3 5 = a \Rightarrow \log_3 5 \cdot \log_5 3 = 1 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{a}$$

$$\log_5 3 = \frac{1}{a} \text{ olduğuna göre, } \log_5 15 = 1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a}$$

27. $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 2 D) $\log_6 2$ E) $\log_6 3$

Çözüm 27

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$$

$$\log_2 6 \cdot \log_6 2 = 1 \text{ olduğuna göre, } \log_6 2 = \frac{1}{\log_2 6}$$

$$\log_3 6 \cdot \log_6 3 = 1 \text{ olduğuna göre, } \log_6 3 = \frac{1}{\log_3 6}$$

olduğuna göre, $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$ elde edilir.

28. $0 \leq \log_2(x-5) \leq 2$ eşitsizliklerini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm 28

I. Yol

$$0 \leq \log_2(x-5) \leq 2$$

$$2^0 \leq x-5 \leq 2^2 \Rightarrow 1 \leq x-5 \leq 4 \Rightarrow 6 \leq x \leq 9 \Rightarrow x = \{6, 7, 8, 9\}$$

II. Yol

$$0 \leq \log_2(x-5) \leq 2$$

$$\log_2 1 \leq \log_2(x-5) \leq \log_2 2^2$$

$$\log_2 1 \leq \log_2(x-5) \leq \log_2 4$$

$$1 \leq x-5 \leq 4 \Rightarrow 6 \leq x \leq 9 \Rightarrow x = \{6, 7, 8, 9\}$$

29. 1'den farklı a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\log_a b = \frac{1}{2}$$

$\log_a c = 3$ olduğuna göre, $\log_b \left(\frac{b^2}{c\sqrt{a}} \right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) -6 E) -5

Çözüm 29

$$\log_b \left(\frac{b^2}{c\sqrt{a}} \right)$$

$$\log_a b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = \sqrt{a}$$

$$\log_a c = 3 \Rightarrow c = a^3$$

c , b cinsinden yazılırsa,

$$a = b^2 \text{ olacağına göre, } c = (b^2)^3 \Rightarrow c = b^6$$

$$\log_b \left(\frac{b^2}{c\sqrt{a}} \right) = \log_b \left(\frac{b^2}{b^6 \cdot b} \right) = \log_b \left(\frac{1}{b^5} \right) = \log_b (b^{-5}) = -5 \cdot \log_b b = -5 \cdot 1 = -5$$

30. $\sum_{n=0}^{100} 3^n$ toplamının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm 30

$$\sum_{n=0}^{100} 3^n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} = \frac{1-3^{101}}{1-3} = \frac{3^{101}-1}{2}$$

$$3^{101} \equiv ? \pmod{5}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$3^3 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{101} \equiv 3^{4 \cdot 25 + 1} \equiv 3 \cdot (3^4)^{25} \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\frac{3^{101}-1}{2} \Rightarrow \frac{3-1}{2} = 1$$

Not :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad x \neq 1, \quad \mathbb{N}^+ \text{ için}$$

31. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri aşağıdaki biçimde tanımlanıyor.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ n, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ -n, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Buna göre, b_4 kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

Çözüm 31

$$b_4 = \sum_{k=0}^4 a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$a_0 = 0, \quad 0 \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise}$$

$$a_1 = 1, \quad 1 \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise}$$

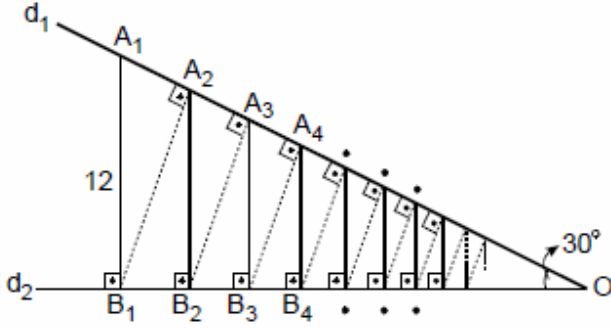
$$a_2 = -2, \quad 2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise}$$

$$a_3 = 0, \quad 3 \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise}$$

$$a_4 = 4, \quad 4 \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise}$$

$$b_4 = \sum_{k=0}^4 a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 1 + (-2) + 0 + 4 = 5 - 2 = 3$$

32.



Yukarıda verilen d_1 ve d_2 doğrularının oluşturduğu açının ölçüsü 30° dir.

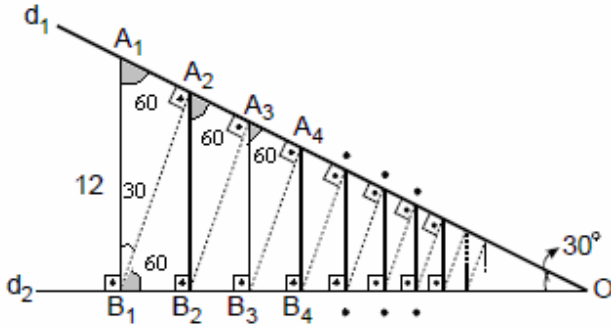
İlk olarak, d_1 doğrusu üzerinde alınan A_1 noktasından d_2 doğrusuna A_1B_1 dikmesi iniliyor.

Sonra B_1 noktasından d_1 doğrusuna B_1A_2 dikmesi ve A_2 dikme ayağından da d_2 doğrusuna A_2B_2 dikmesi inilerek bu işleme devam ediliyor.

$|A_1B_1| = 12$ cm olduğuna göre, d_2 doğrusuna bu şekilde inilen tüm dikmelerin uzunluklarının toplamı olan $|A_1B_1| + |A_2B_2| + |A_3B_3| + \dots$ kaç cm'dir?

- A) 32 B) 36 C) 38 D) 40 E) 48

Çözüm 32



$$|A_1B_1| = 12$$

A_1B_1O dik üçgeninde, $m(\angle OA_1B_1) = 180 - (90 + 30) = 60$

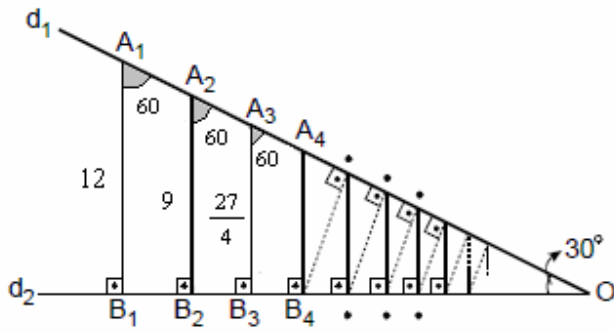
$B_1A_2A_1$ dik üçgeninde, $|A_1B_1| = 12$ ise $|A_2B_1| = 6\sqrt{3}$

$B_1B_2A_2$ dik üçgeninde, $|A_2B_1| = 6\sqrt{3}$ ise $|A_2B_2| = 9$

$B_2A_3A_2$ dik üçgeninde, $|A_2B_2| = 9$ ise $|A_3B_2| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$B_2B_3A_3$ dik üçgeninde, $|A_3B_2| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ise $|A_3B_3| = \frac{27}{4}$

$$|A_1B_1| + |A_2B_2| + |A_3B_3| + \dots = 12 + 9 + \frac{27}{4} + \dots$$



$$12 + 9 + \frac{27}{4} + \dots = 12 \cdot (1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \dots)$$

$$a_1 = 12$$

$$a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow 9 = 12 \cdot r \Rightarrow r = \frac{3}{4} \quad (r : \text{geometrik dizinin ortak çarpanı})$$

$$a_3 = \frac{27}{4}$$

$$12 + 9 + \frac{27}{4} + \dots = 12 \cdot (1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \dots) = 12 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 12 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 12 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 12 \cdot 4 = 48$$

Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

Not : Geometrik Dizi

Ardışık iki terimin oranı aynı olan dizilere geometrik dizi denir.

$r \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise (a_n) bir geometrik dizidir.

“ r ” ye dizinin ortak çarpanı denir.

Not : Geometrik Seri

$a_n = a.r^{n-1}$ geometrik dizisinde $|r| < 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = a.(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{k-1} + \dots) = a.\frac{1}{1-r} = \frac{a}{1-r} \text{ dir.}$$

33. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -6

Çözüm 33

I. Yol

3. sütunun 2 elemanı 0 (sıfır) olduğundan açılımı 3. sütuna göre yapalım.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot [3 \cdot 1 - 2 \cdot 2] = 2 \cdot (3 - 4) = 2 \cdot (-1) = -2$$

II. Yol

Sarrus kuralına göre,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \cdot 0 - 1 \cdot (-3) \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 - 8 = -2$$

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin devriği A^t ve ters matrisi A^{-1} olduğuna göre,

$A^t \cdot A^{-1}$ çarpımını aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{9}{2} & -5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{-9}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 3 \\ \frac{-5}{2} & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}$

Çözüm 34

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin devriği, $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin ters matrisi için $A \cdot A^{-1} = I$ olması gerekir.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+3c & b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2a + 4c = 1$$

$$a + 3c = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{-1}{2}$$

$$2b + 4d = 0$$

$$b + 3d = 1 \Rightarrow b = -2, \quad d = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) & 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{9}{2} & -5 \end{bmatrix}$$

Not : Bir Matrisin Devriği (Transpozu)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin aynı indisli satırıyla sütunlarının yer değiştirmesiyle oluşturulan $[a_{ji}]_{n \times m}$ matrisine A matrisinin devriği denir ve A^T ile ya da A^d ile gosterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Not : Bir Matrisin Tersi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A) = \frac{1}{a.d - b.c} \cdot \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

Not : Ek (Adjoint) Matris

Karesel A matrisinin a_{ij} terimlerinin yerine A_{ij} eř çarpanlarının yerine yazılmasıyla oluşan $[A_{ij}]$ matrisinin devriğine A matrisinin ek matrisi denir ve $\text{Ek}(A)$ ile gosterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |d| = d$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |c| = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |b| = -b$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |a| = a$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ek}(A) = \begin{vmatrix} d & -c \\ -b & a \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

35. $2x + 2y - z = 1$

$$x + y + z = 2$$

$$y - z = 1$$

Yukarıdaki denklem sisteminin çözümünde x kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 3

Çözüm 35

I. Yol

$$2x + 2y - z = 1$$

$$x + y + z = 2$$

$$2x + 2y - z = 1$$

$$-2x - 2y - 2z = -4$$

$$-3z = -3 \Rightarrow z = 1$$

$$z = 1 \text{ olduğuna göre, } y - z = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 2 \text{ olduğuna göre, } x + y + z = 2 \Rightarrow x + 2 + 1 = 2 \Rightarrow x = -1$$

II. Yol

$$2x + 2y - z = 1$$

$$x + y + z = 2$$

$$y - z = 1$$

$$\text{Cramer kuralına göre, } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sarrus kuralına göre, } \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = 0.2.1 + 1.1.(-1) + 2.1.(-1) - 1.2.(-1) - 2.1.1 - 0.1.(-1)$$

$$= 0 - 1 - 2 + 2 - 2 - 0 = -3 \Rightarrow \Delta = -3$$

$\Delta \neq 0$ ise tek çözümü vardır ve bu çözüm, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = 1.2.1 + 2.1.(-1) + 1.1.(-1) - 2.2.(-1) - 1.1.1 - 1.1.(-1)$$

$$= 2 - 2 - 1 + 4 - 1 + 1 = 3 \Rightarrow \Delta_1 = 3$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ olduğuna göre, } x = \frac{3}{-3} = -1$$

36. Türevlenebilir bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f'(x) = 2x^2 - 1$$

$$f(2) = 4$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm 36

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = \frac{f(2) - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L'hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{1} = f'(2)$$

$$f'(x) = 2x^2 - 1 \text{ olduğuna göre, } f'(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

Not : L' Hospital Kuralı

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ limitinde } \frac{0}{0} \text{ veya } \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği varsa, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ olur.}$$

37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{-1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

özüm 37

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

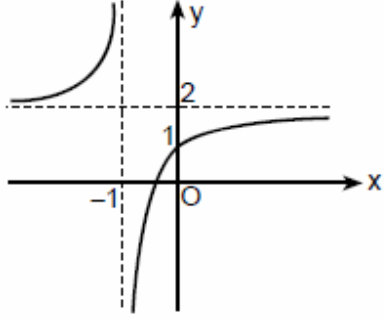
L'hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1}} = \frac{-1}{2}$$

Not : L' Hospital Kuralı

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa , $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ olur.

38.



Yukarıdaki şekilde $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limitlerinin toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Çözüm 38

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 + 1 = 3$$

39. $f(x) = \ln(\sin^2 x + e^{2x})$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) e B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

Çözüm 39

$$f(x) = \ln(\sin^2 x + e^{2x})$$

$$f'(x) = \frac{(\sin^2 x + e^{2x})'}{\sin^2 x + e^{2x}} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x}}{\sin^2 x + e^{2x}}$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 + 2 \cdot e^{2 \cdot 0}}{\sin^2 0 + e^{2 \cdot 0}} = \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2$$

40. $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 3$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin bir noktasındaki teğet doğrusunun denkleminin $y = 4$ olması için a kaç olmalıdır?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Çözüm 40

$y = 4$ doğrusunun eğimi $= 0$

Teğet değme noktasında eğim (türev) sıfır olacağına göre,

$$f'(x) = 6x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = 4 \text{ olmalıdır.}$$

$$2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3 = 4 \Rightarrow \frac{2a^3}{27} - \frac{a^3}{9} = 1 \Rightarrow \frac{-a^3}{27} = 1 \Rightarrow a = -3$$

41. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ fonksiyonunun $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ aralığındaki maksimum değeri kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 0

Çözüm 41

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ fonksiyonunun türevinin kökleri incelenirse,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 10x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 10) = 0$$

$$x = 0$$

$$4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$f(0) = 4$$

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = 4 - \frac{25}{4} = \frac{-9}{4} = -2,25$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = 4 - \frac{25}{4} = \frac{-9}{4} = -2,25$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{1}{16} - \frac{5}{4} + 4 = 4 - \frac{19}{16} = \frac{45}{16} = 2,81$$

$$\left\{\frac{-9}{4}, \frac{45}{16}, 4\right\}$$

Buna göre, fonksiyonun maksimum değeri 4 dür.

Not : Bir fonksiyonun bir aralıktaki en büyük ve en küçük değeri

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki türevinin kökleri x_1, x_2, \dots, x_n ;

türevsiz olduğu noktalar c_1, c_2, \dots, c_n ise

$$\{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)\}$$

kümesinin en büyük elemanı f nin $[a, b]$ aralığındaki en büyük değeri,

en küçük elemanı f nin $[a, b]$ aralığındaki en küçük değeridir.

42. $f''(x) = 6x - 2$

$$f'(0) = 4$$

$$f(0) = 1$$

koşullarını gerçekleyen f fonksiyonu için $f(1)$ değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm 42

$$f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow \int f''(x) = \int (6x - 2) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + c$$

$$f'(0) = 4 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

$$\int f'(x) = \int (3x^2 - 2x + 4) \Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 + 4x + C$$

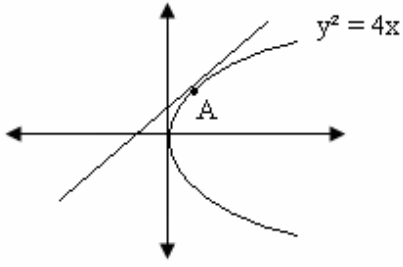
$$f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 + 4 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1 \text{ olduğuna göre, } f(1) = 1 - 1 + 4 \cdot 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 5$$

43. $y^2 = 4x$ parabolüne üzerinde bulunan $A(x, y)$ noktasından çizilen teğetin eğimi 1'dir. Buna göre, A noktasının koordinatlarının toplamı olan $x + y$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm 43



$$y^2 = 4x \text{ her iki tarafın türevi alınırsa, } 2y \cdot y' = 4 \Rightarrow y \cdot y' = 2$$

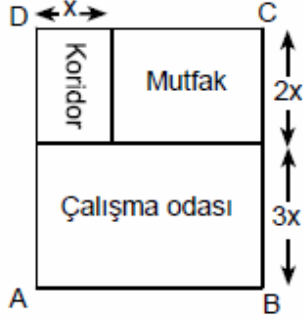
Çizilen teğetin eğimi 1 olduğuna göre, $y' = 1$ ise

$$y \cdot 1 = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ bulunur.}$$

$$y^2 = 4x \text{ olduğundan, } 2^2 = 4x \Rightarrow x = 1$$

$$A(x, y) = A(1, 2) \Rightarrow x + y = 1 + 2 = 3$$

44.

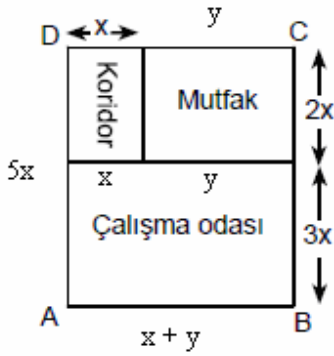


Koridor, mutfak ve çalışma odasından oluşan bir iş yerinin yukarıda verilen modeli ABCD dikdörtgenidir ve bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 72 metredir.

Bu iş yerindeki mutfağın en geniş alanlı olması için x kaç metre olmalıdır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm 44



$$\text{Çevre}(ABCD) = 72 \Rightarrow 2.(5x + (x + y)) = 72 \Rightarrow 6x + y = 36$$

$$y = 36 - 6x$$

$$\text{Alan}(\text{mutfak}) = S = 2x.y$$

$$\text{Tek değişkene bağlı fonksiyon şeklinde yazılırsa, } S = 2x.(36 - 6x) \Rightarrow S = 72x - 12x^2$$

$$\text{Mutfağın en geniş alanlı olması için, } S' = 0 \Rightarrow 72 - 24x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$y = 36 - 6x \text{ olduğuna göre, } y = 36 - 6.3 \Rightarrow y = 18$$

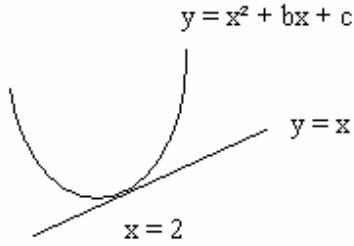
$$\text{Alan}(\text{mutfak}) = S = 2x.y = 2.3.18 = 108$$

45. $y = x^2 + bx + c$ parabolüne $x = 2$ noktasında teğet olan doğru $y = x$ ise $b + c$ toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 45

I. Yol



Parabol ile doğru teğet olduğuna göre, eğimleri eşit olur.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2x + b \\ y = x \Rightarrow y' = 1 \end{array} \right\} 2x + b = 1 \text{ ise}$$

$$x = 2 \text{ için, } 2 \cdot 2 + b = 1 \Rightarrow b = -3$$

Parabol ile doğrunun kesişim noktası $x = 2$ için,

$$y = x^2 - 3x + c = x \Rightarrow x^2 - 4x + c = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = 4$$

Buna göre, $y = x^2 + bx + c = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow b + c = -3 + 4 = 1$ elde edilir.

II. Yol

$$x = 2 \text{ ise, } y = x \Rightarrow y = 2 \text{ olduğuna göre, teğet değme noktası } = (2, 2)$$

$y = x$ doğrusunun eğimi : 1

$y = x^2 + bx + c$ parabolünün eğimi de 1 olacağına göre,

$$f'(2) = 1 \Rightarrow 4 + b = 1 \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 2 \Rightarrow 2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 4$$

$$b + c = -3 + 4 = 1$$

46. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

Çözüm 46

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\cos x = u$ olsun.

$$-\sin x dx = du \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \cos 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{u^2} \cdot \frac{-du}{\sin x} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2} = -\int_1^{\frac{1}{2}} u^{-2} du = -\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1} \right) \Big|_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{u} \Big|_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

47. $\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}} dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

özüm 47

$\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}} dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\sqrt{2x+1} = u$ olsun.

$$2x+1 = u^2 \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{2}$$

$$2dx = 2udu \Rightarrow dx = udu$$

$$x = 4 \Rightarrow u = 3$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{6 \frac{u^2-1}{2}}{\sqrt{u^2}} udu = \int_1^3 3(u^2-1)du$$

$$= \left(\frac{3u^{2+1}}{3} - 3u \right) \Big|_1^3 = (u^3 - 3u) \Big|_1^3 = (3^3 - 3 \cdot 3) - (1^3 - 3 \cdot 1) = 27 - 9 + 2 = 20$$

48. $y = x^3$ eğrisi ve $y = x$ doğrusu ile sınırlı (sonlu) bölgenin alanı kaç birim karedir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

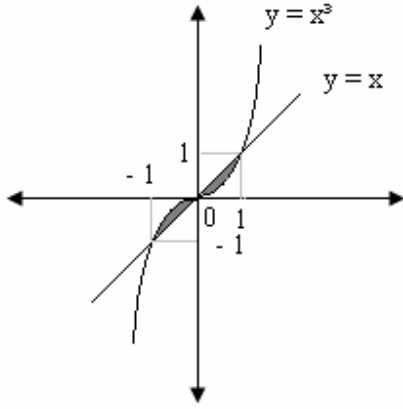
Çözüm 48

$y = x^3$ eğrisi ile $y = x$ doğrusunun kesişim noktaları,

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1 \Rightarrow (x, y) = (1, 1) = (-1, -1)$$



$$\text{Taralı bölgenin alanı} = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

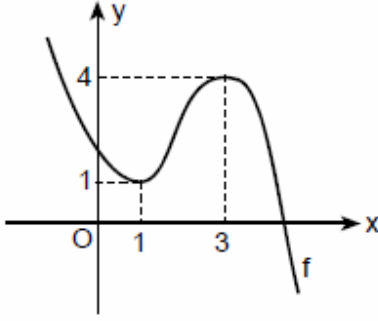
$$= \left[0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) \right] + \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) - 0 \right]$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

veya

$$\text{Taralı bölgenin alanı} = 2 \cdot \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{1}{2}$$

49.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için $\int_1^3 \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} dx$ integralinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm 49

$$\int_1^3 \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} dx = \int_1^3 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \left(\frac{f(x)}{x} \right) \Big|_1^3 = \frac{f(3)}{3} - \frac{f(1)}{1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{1} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

50.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \text{ ise} \\ 2x - 3, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

için $\int_1^3 f(x+1)dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm 50

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \text{ ise} \\ 2x - 3, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x+1) = \begin{cases} 3 - (x+1), & x+1 < 2 \text{ ise} \\ 2 \cdot (x+1) - 3, & x+1 \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x+1) = \begin{cases} 4 - x, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\int_1^3 f(x+1)dx = \int_1^3 (2x-1)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = (x^2 - x) \Big|_1^3 = (3^2 - 3) - (1^2 - 1) = 6 - 0 = 6$$

Adnan ÇAPRAZ

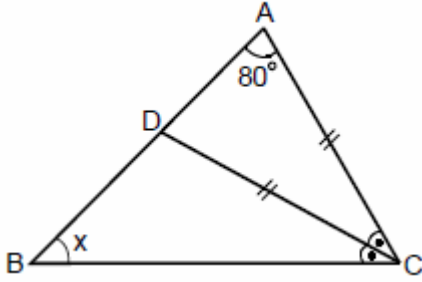
adnancapraz@yahoo.com

AMASYA

Lisans Yerleřtirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 19 Haziran 2010

Geometri Soruları ve Çözümleri

1.



ABC bir üçgen

$$|CA| = |CD|$$

$$m(\text{ACD}) = m(\text{DCB})$$

$$m(\text{BAC}) = 80^\circ$$

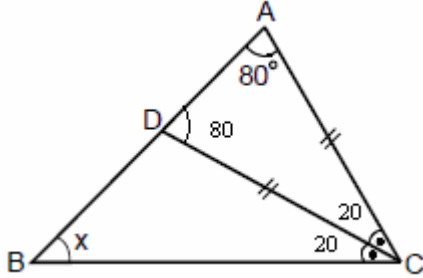
$$m(\text{ABC}) = x$$

Yukarıdaki verilere göre x kaç derecedir?

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 60 E) 75

Çözüm 1

$|CA| = |CD|$ olduğuna göre, ACD üçgeni ikizkenar üçgendir.



$$m(\text{CAD}) = m(\text{CDA}) = 80$$

$$m(\text{ACD}) = 180 - (80 + 80) = 20$$

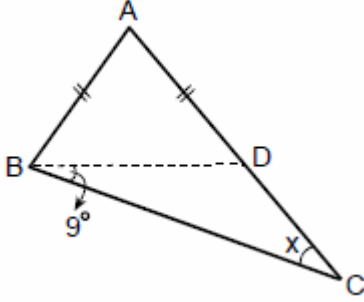
$$m(\text{ACD}) = m(\text{DCB}) = 20$$

BDC üçgeninde, bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğuna göre,

$$20 + x = 80 \Rightarrow x = 60$$

Not : Bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

2.



ABC bir ikizkenar üçgen

$$|AB| = |AD|$$

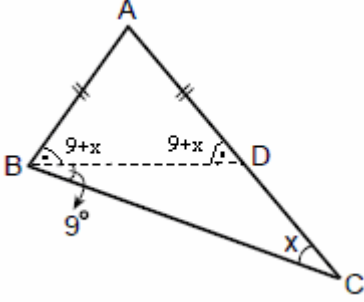
$$m(\text{DBC}) = 9^\circ$$

$$m(\text{BCD}) = x$$

Yukarıdaki şekilde $|AC| = |BC|$ olduğuna göre, x kaç derecedir?

- A) 36 B) 39 C) 48 D) 51 E) 54

Çözüm 2



BDC üçgeninde, bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğuna göre,

$$m(\text{ADB}) = x + 9$$

$|AB| = |AD| \Rightarrow$ BAD üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan,

$$m(\text{ADB}) = m(\text{ABD}) = x + 9$$

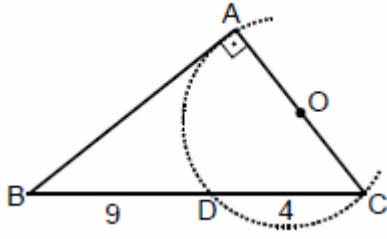
ABC bir ikizkenar üçgen ve $|AC| = |BC|$ olduğundan,

$$m(\text{ABC}) = m(\text{BAC}) = (x + 9) + 9 = x + 18$$

ABC üçgeninde iç açılar toplamı 180 derece olduğuna göre,

$$(x + 18) + (x + 18) + x = 180 \Rightarrow 3x = 144 \Rightarrow x = 48 \text{ elde edilir.}$$

3.



ABC bir üçgen

$$m(\text{BAC}) = 90^\circ$$

$$|BD| = 9 \text{ cm}$$

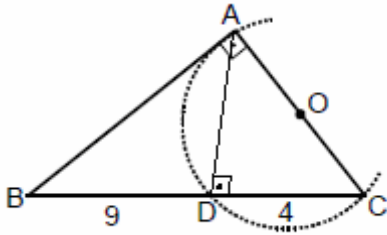
$$|DC| = 4 \text{ cm}$$

Yukarıdaki şekilde $[AC]$ kenarını çap kabul eden O merkezli çember, $[BC]$ kenarını D noktasında kesmektedir.

Buna göre, ABC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 39 B) 36 C) 35 D) 32 E) 30

Çözüm 3

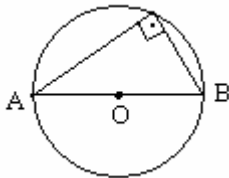


AD çizilirse, çemberde çapı gören çevre açısı dik olduğuna göre, $AD \perp BC$ olur.

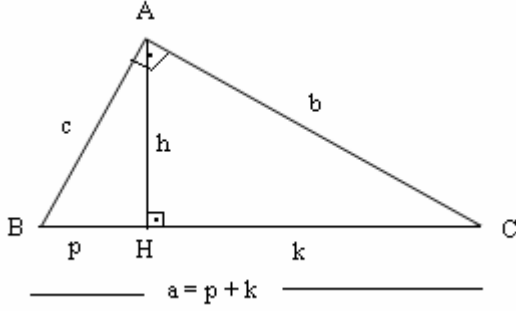
$$\text{Öklid bağıntısına göre, } |AD|^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow |AD| = 6$$

$$\text{Alan}(\text{ABC}) = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{(9 + 4) \cdot 6}{2} = 13 \cdot 3 = 39$$

Not : Çapı gören çevre açısı 90 derecedir.



Not : Öklid bağıntıları



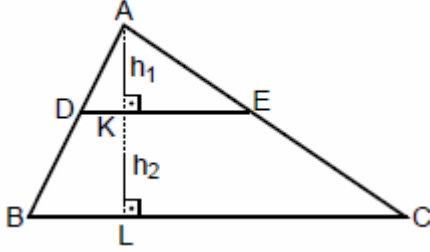
$$I) h^2 = p.k$$

$$II) c^2 = p.a$$

$$b^2 = k.a$$

$$III) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

4.



ABC bir üçgen

DE // BC

$$|AK| = h_1$$

$$|KL| = h_2$$

Yukarıdaki şekilde ADE üçgeninin alanının BCED dörtgeninin alanına oranı $\frac{A(ADE)}{A(BCED)} = \frac{4}{21}$

olduğuna göre, $\frac{h_1}{h_2}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

Çözüm 4

ABC bir üçgen ve DE // BC olduğuna göre, ADE \cong ABC ise benzerlik oranı = k = $\frac{h_1}{h_1 + h_2}$

$$\frac{A(ADE)}{A(BCED)} = \frac{4}{21} \Rightarrow \frac{A(ADE)}{A(ABC)} = \frac{4}{25} = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3} \text{ elde edilir.}$$

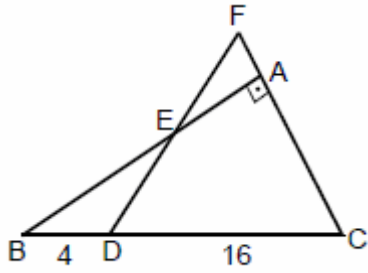
Not :

Benzer iki üçgenin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

Not : Benzer üçgenlerin özellikleri

Benzer iki üçgende, karşılıklı yüksekliklerin uzunluklarının oranı benzerlik oranına eşittir.

5.



ABC bir üçgen

$$m(\text{BAC}) = 90^\circ$$

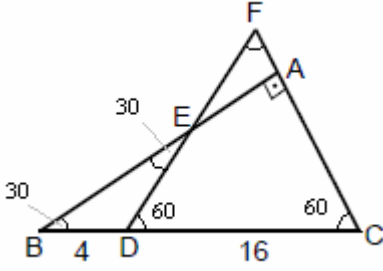
$$|BD| = 4 \text{ cm}$$

$$|DC| = 16 \text{ cm}$$

Yukarıdaki şekilde FDC bir eşkenar üçgen olduğuna göre, $\frac{|FA|}{|AC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{5}{11}$ E) $\frac{3}{13}$

Çözüm 5



FDC bir eşkenar üçgen olduğuna göre, $m(\text{FDC}) = m(\text{DCF}) = m(\text{CFD}) = 60$

BAC dik üçgeninde, $m(\text{DCF}) = 60$ ise $m(\text{CBA}) = 30$

BDE üçgeninde, bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğuna göre,

$$m(\text{DEB}) = 30$$

$$|BC| = 16 + 4 = 20 \text{ ise}$$

Bir dik üçgende, 30 derecenin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısı olduğuna göre,

$$|AC| = 10$$

$$\text{BDE ikizkenar üçgeninde, } |BD| = 4 = |DE|$$

$$\text{EAF dik üçgeninde, } m(\text{FEA}) = 30$$

$$|DC| = 16 = |DF| \Rightarrow |EF| = 16 - 4 = 12$$

Bir dik üçgende, 30 derecenin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısı olduğuna göre,

$$|AF| = 6$$

$$\text{Buna göre, } \frac{|FA|}{|AC|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ elde edilir.}$$

Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

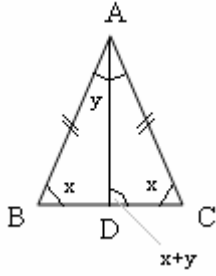
60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

6. $|AB| = |AC|$ olan herhangi bir ABC ikizkenar üçgeni için [BC] üzerinde B ve C'den farklı bir D noktası alınıyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) $|AB| > |AD|$ B) $|AB| > |BD|$ C) $|AB| > |CD|$
D) $|AD| > |BD|$ E) $|BD| > |AB|$

Çözüm 6



$$m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = x$$

$$m(\angle DAB) = y \text{ olsun.}$$

ABD üçgeninde, bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğuna göre, $m(\angle ADC) = x + y$

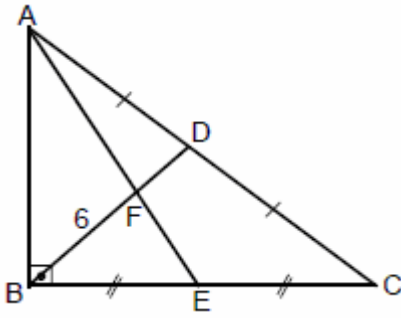
$$x + y > x$$

Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar, büyük kenar karşısında büyük açı bulunacağına göre,

$$x + y > x \Rightarrow |AC| > |AD|$$

$|AB| = |AC|$ olduğuna göre, $|AB| > |AD|$ olur.

7.



ABC bir üçgen

$AB \perp BC$

$|BE| = |EC|$

$|AD| = |DC|$

$|BF| = 6 \text{ cm}$

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|$ uzunluğu kaç cm'dir?

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

Çözüm 7

ABC dik üçgeninde,

BD kenarortay ve AE kenarortay olduğuna göre, F noktası ağırlık merkezidir.

$$|BF| = 6 \Rightarrow |FD| = 3$$

$$|BD| = 6 + 3 = 9$$

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğuna göre,

$$|AD| = |DC| = 9$$

Buna göre, $|AC| = 9 + 9 = 18$ elde edilir.

Not : Kenarortay

Bir üçgenin kenarortayları aynı bir noktada kesişirler.

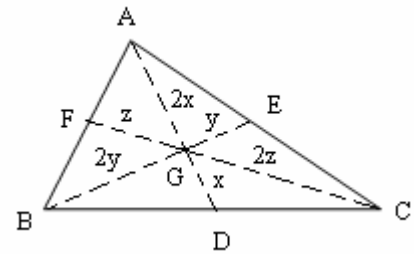
Bu kesim noktasına G ağırlık merkezi denir.

$$|GD| = \frac{1}{3} \cdot |AD|$$

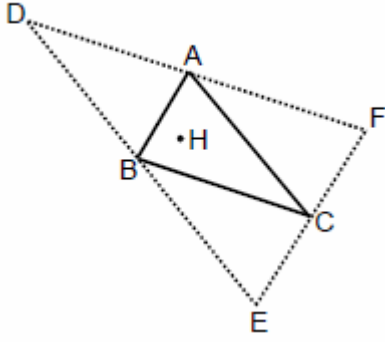
$$|AG| = \frac{2}{3} \cdot |AD|$$

Not :

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir.



8.

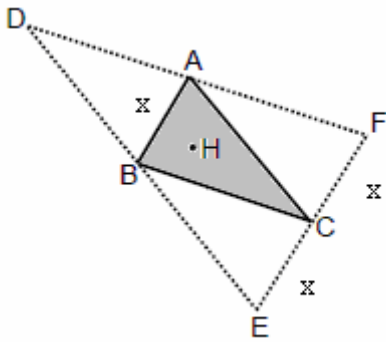


Çeşitkenar bir ABC üçgeninin A köşesinden [BC] kenarına, B köşesinden [AC] kenarına ve C köşesinden [AB] kenarına paralel doğrular çizilerek şekildeki gibi bir DEF üçgeni elde ediliyor.

H noktası ABC üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası olduğuna göre, DEF üçgeninin nesidir?

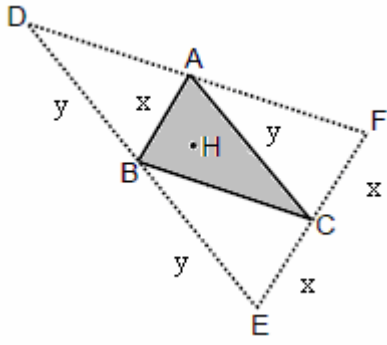
- A) Kenar ortaylarının kesim noktasıdır.
- B) İki dış açıortay ve bir iç açıortayının kesim noktasıdır.
- C) Yüksekliklerinin kesim noktasıdır.
- D) İç teğet çemberinin merkezidir.
- E) Çevrel çemberinin merkezidir.

Çözüm 8

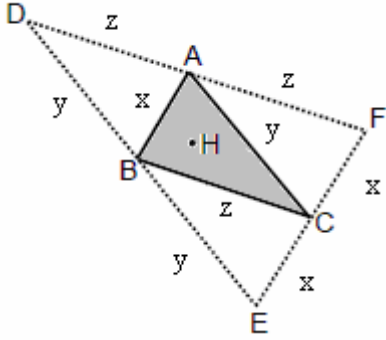


A köşesinden [BC] kenarına paralel doğrular çizilirse, ABCF paralel kenarı elde edilir.

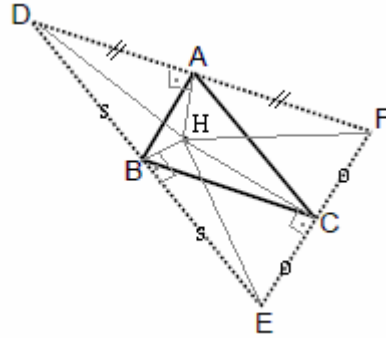
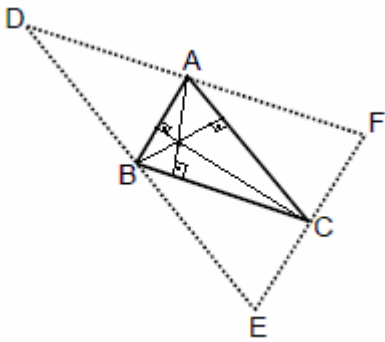
$$|AB| = x \text{ olsun.} \Rightarrow |CF| = x = |CF|$$



B köşesinden [AC] kenarına paralel doğrular çizilirse, ABEC paralel kenarı elde edilir.
 $|AC| = y$ olsun. $\Rightarrow |BE| = y = |DB|$



C köşesinden [AB] kenarına paralel doğrular çizilirse, ABCF paralel kenarı elde edilir.
 $|BC| = z$ olsun. $\Rightarrow |AF| = z = |AD|$



$h_a \perp BC$ ve ABCF paralel kenar olduğundan, $AH \perp DF$ ve
DHF üçgeninde tabana ait yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğuna göre,
DHF üçgeni ikizkenar üçgendir.

$$AH \perp DF \text{ ve } |AD| = |AF| \Rightarrow |HD| = |HF|$$

$h_b \perp AC$ ve ABEC paralel kenar olduğundan, $BH \perp DE$

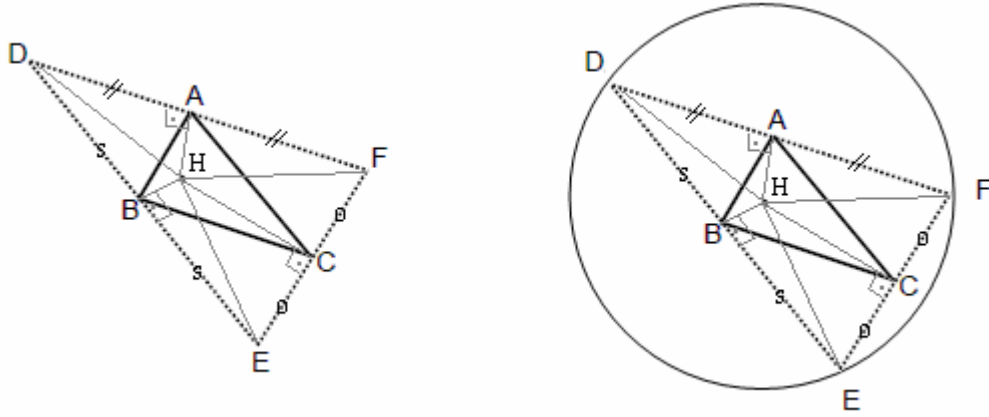
DHE üçgeninde tabana ait yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğuna göre,
DHE üçgeni ikizkenar üçgendir.

$$BH \perp DE \text{ ve } |BD| = |BE| \Rightarrow |HD| = |HE|$$

$h_c \perp AB$ ve ABCF paralel kenar olduğundan, $CH \perp EF$

EHF üçgeninde tabana ait yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğuna göre,
EHF üçgeni ikizkenar üçgendir.

$$CH \perp EF \text{ ve } |CE| = |CF| \Rightarrow |HE| = |HF|$$

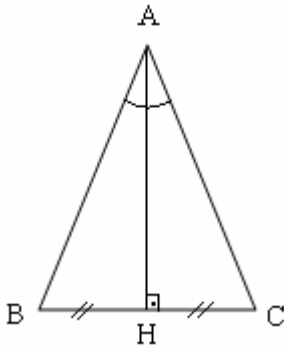


Buna göre, $|HD| = |HE| = |HF|$ olduğuna göre, H noktası aynı zamanda DEF üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

Not : İkizkenar Üçgen

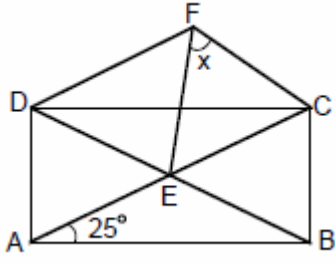
Tabana ait yükseklik aynı zamanda açıortay ve kenarortaydır.

B'den [AC]'ye veya C'den [AB]'ye çizilen dikme için aynı şeyleri söyleyemeyiz.



$$[AH] = \text{Açıortay} = \text{Kenarortay} = \text{Yükseklik} \Rightarrow n_A = V_a = h_a$$

9.



ABCD bir dikdörtgen

E, köşegenlerin kesim noktası

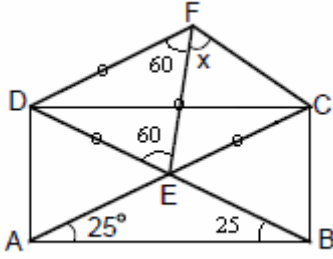
$$m(\text{BAC}) = 25^\circ$$

$$m(\text{EFC}) = x$$

Şekildeki F noktası, FDE bir eşkenar üçgen olacak biçimde alındığına göre, x kaç derecedir?

- A) 30 B) 35 C) 45 D) 50 E) 55

Çözüm 9



ABCD bir dikdörtgen ve E, köşegenlerin kesim noktası olduğuna göre,

$$|DE| = |EC| \text{ ve } |AE| = |EB|$$

$$m(\text{BAE}) = m(\text{EBA}) = 25 \Rightarrow m(\text{AEB}) = 180 - (25 + 25) = 130$$

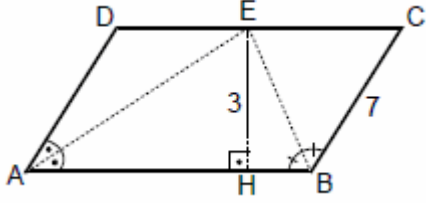
$$m(\text{DEC}) = 130 \text{ (iç - ters açılar)}$$

$$m(\text{DEF}) = 60 \Rightarrow m(\text{FEC}) = 130 - 60 = 70$$

FDE eşkenar üçgen olduğuna göre, $|DF| = |DE| = |EF| = |EC|$ olur.

$$\text{FEC ikizkenar üçgeninde, } x = \frac{180 - 70}{2} = 55 \text{ elde edilir.}$$

10.



ABCD bir paralelkenar

$EH \perp AB$

$|EH| = 3 \text{ cm}$

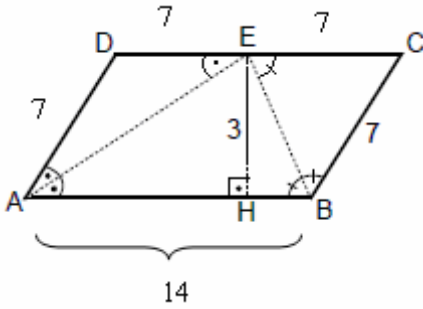
$|BC| = 7 \text{ cm}$

Şekildeki ABCD paralelkenarının A ve B açılarının iç açıortayları [DC] kenarı üzerindeki E noktasında kesişmektedir.

Buna göre, ABCD paralelkenarının alanı kaç cm^2 dir?

A) 42 B) 40 C) 36 D) 28 E) 24

Çözüm 10



$m(\text{BAE}) = m(\text{DEA})$ iç – ters açılar \Rightarrow ADE ikizkenar üçgen olur.

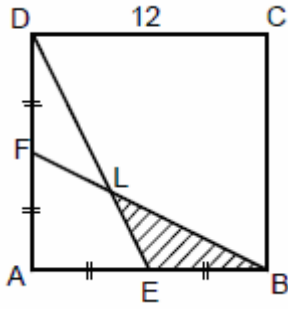
$|AD| = |DE| = 7$

$m(\text{EBA}) = m(\text{BEC})$ iç – ters açılar \Rightarrow BCE ikizkenar üçgen olur.

$|BC| = |CE| = 7$

$|AB| = 7 + 7 = 14$ ve $|EH| = 3 \Rightarrow \text{Alan}(\text{ABCD}) = 3 \cdot 14 = 42 \text{ cm}^2$

11.



ABCD bir kare

$$|DF| = |FA|$$

$$|AE| = |EB|$$

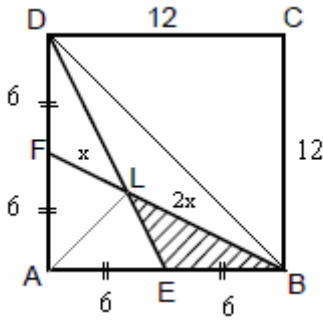
$$|DC| = 12 \text{ cm}$$

Yukarıdaki verilere göre, LEB üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm 11

ABCD karesinin [BD] köşegeni çizilirse,



DAB dik üçgeninde, DE ve BF kenarortay olduğuna göre, L noktası ağırlık merkezi olur.

AL çizilirse,

$$|FL| = x \text{ olsun.} \quad \Rightarrow \quad |LB| = 2x$$

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranına eşit olduğuna göre,

$$\text{alan}(FAB) = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36 \quad \Rightarrow \quad \text{alan}(ALB) = 24$$

ALB üçgeninde, $|AE| = |EB| = 6$ ve yükseklikleri eşit olduğundan,

$\text{alan}(LEB) = 12$ elde edilir.

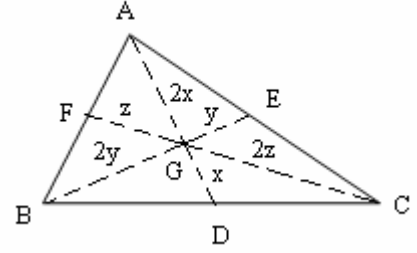
Not : Kenarortay

Bir üçgenin kenarortayları aynı bir noktada kesişirler.

Bu kesim noktasına G ağırlık merkezi denir.

$$|GD| = \frac{1}{3} \cdot |AD|$$

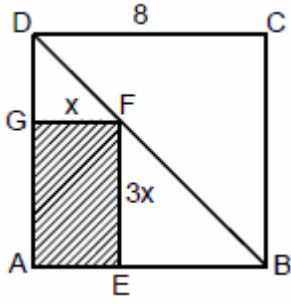
$$|AG| = \frac{2}{3} \cdot |AD|$$



Not :

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranına eşittir.

12.



ABCD bir kare

AEFG bir dikdörtgen

$$|DC| = 8 \text{ cm}$$

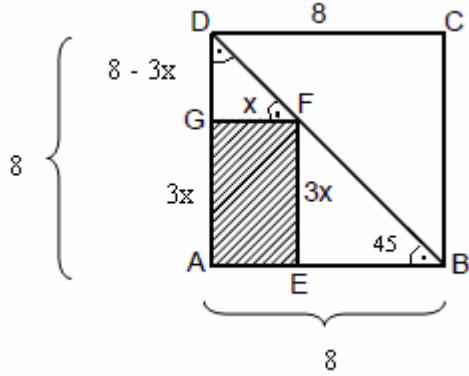
$$|FE| = 3x \text{ cm}$$

$$|GF| = x \text{ cm}$$

Yukarıdaki verilere göre, AEFG dikdörtgeninin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 21

Çözüm 12



ABCD karesinin köşegeni [DB] olduğundan, $m(\angle ABD) = m(\angle GFD) = m(\angle BDA) = 45$

DGF ikizkenar dik üçgeninde, $|GF| = |GD| = x$

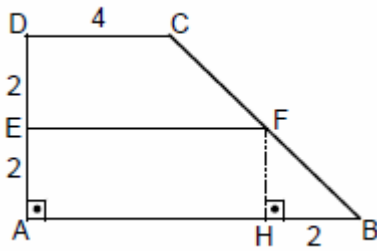
$$|FE| = 3x = |AG| \Rightarrow |GD| = 8 - 3x$$

$$|GD| = x = 8 - 3x \Rightarrow x = 2$$

$|GD| = 2$ ve $|FE| = 6$ olacağına göre, $\text{alan}(AEFG) = 2 \cdot 6 = 12$ bulunur.

Not : Bir karede köşegenler açılarını açırtaydır.

13.



ABCD bir dik yamuk

$DC \parallel EF \parallel AB$

$DA \perp AB$

$FH \perp AB$

$|DE| = 2 \text{ cm}$

$|EA| = 2 \text{ cm}$

$|HB| = 2 \text{ cm}$

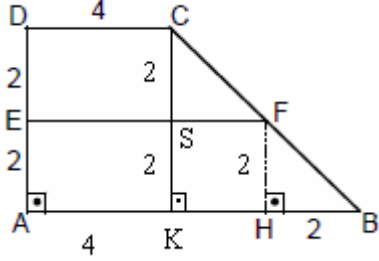
$|DC| = 4 \text{ cm}$

Yukarıdaki verilere göre, ABCD yamuğunun alanı kaç cm^2 dir?

- A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

Çözüm 13

CK dikmesi çizilirse,

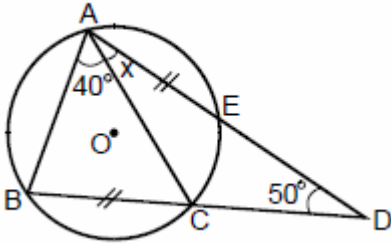


$$|CS| = |SK| = |FH| = 2$$

$$BHF \cong BKC \Rightarrow \frac{2}{2+|HK|} = \frac{2}{4} \Rightarrow |HK| = 2$$

$$|DC| = 2, |AB| = 8 \text{ ve } |AD| = 4 \text{ olduğuna göre, } \text{alan}(ABCD) = \frac{(8+4) \cdot 4}{2} = 24$$

14.



O noktası çemberin merkezi

$$|AE| = |BC|$$

$$m(BDA) = 50^\circ$$

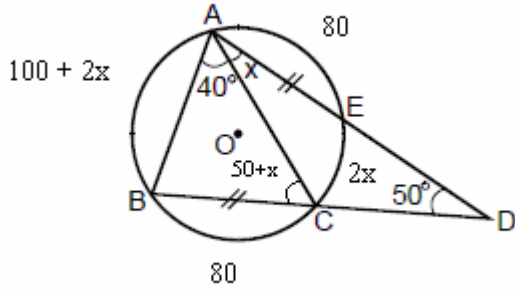
$$m(BAC) = 40^\circ$$

$$m(CAE) = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Çözüm 14



$$m(\text{CAE}) = x \Rightarrow \text{CE yayı} = 2x \text{ (çevre açısı)}$$

$$m(\text{BAC}) = 40 \Rightarrow \text{BC yayı} = 80 \text{ (çevre açısı)}$$

$$|AE| = |BC|$$

Eşit kirişlere ait yayların ölçüleri eşit olduğuna göre, BC yayı = AE yayı = 80

$$m(\text{ADB}) = 50 \text{ ve } m(\text{CAD}) = 2x \text{ ise}$$

Bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğuna göre, $m(\text{ACB}) = 50 + x$

$$m(\text{ACB}) = 50 + x \Rightarrow \text{AB yayı} = 2 \cdot (50 + x) = 100 + 2x \text{ (çevre açısı)}$$

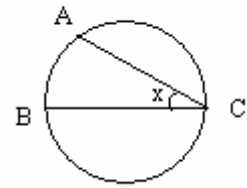
$$2x + 80 + (100 + 2x) + 80 = 360 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow x = 25 \text{ elde edilir.}$$

Not : Çevre açısı (Çember açısı)

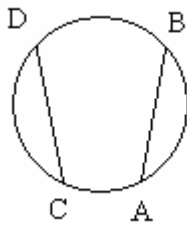
Köşesi çember üzerinde olan açıya çevre açısı denir.

Çevre açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

$$x = m(\text{ACB}) = \frac{m(\text{AB})}{2}$$



Not : Eşit kirişlere ait yayların ölçüleri eşittir, eşit yaylara ait kirişler eşittir.



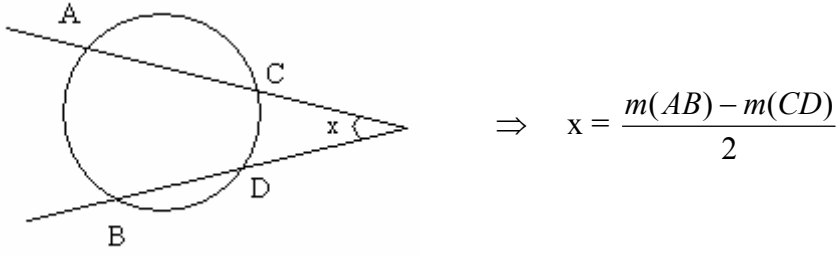
$$|AB| = |CD| \Leftrightarrow \text{AB yayı} = \text{CD yayı}$$

Not : Bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

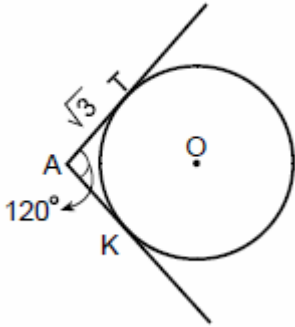
Not : Çemberde Açılar – Dış Açı

Köşesi çemberin dış bölgesinde ve kenarları kesen veya teğet olan açığa dış açı denir.

Dış açının ölçüsü gördüğü yaylar farkının yarısına eşittir.



15.



AT ve AK doğruları O merkezli çembere teğet

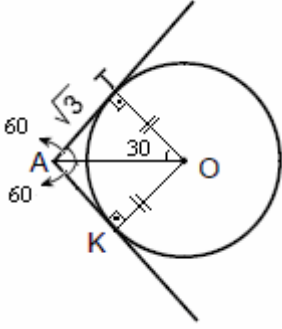
$$m(\text{TAK}) = 120^\circ$$

$$|AT| = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Yukarıdaki verilere göre, çemberin çevre uzunluğu kaç cm'dir?

- A) 4π B) 5π C) 6π D) $2\pi\sqrt{3}$ E) $3\pi\sqrt{3}$

Çözüm 15



AT ve AK doğruları O merkezli çembere teğet ise yarıçap teğete dik olduğuna göre,
 $OT \perp AT$ ve $OK \perp AK$

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğuna göre,
 $|AT| = |AK|$

AO çizilirse, AO açıortay olacağından, ATO dik üçgeninin açıları, $30 - 60 - 90$ olur.
 30° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün yarısına eşit olduğundan,

$$|AT| = \sqrt{3} \Rightarrow |AO| = 2\sqrt{3}$$

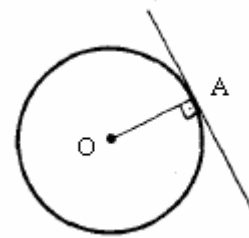
60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşit olduğundan,

$$|AO| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |OT| = 3 \text{ (O merkezli çemberin yarıçapı)}$$

O merkezli çemberin çevresi $= 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ bulunur.

Not :

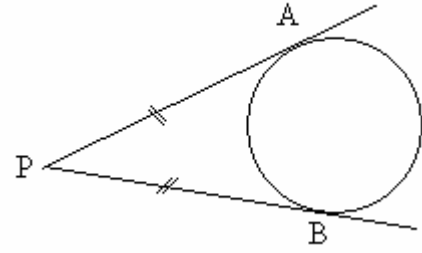
Yarıçap teğete değme noktasında diktir.



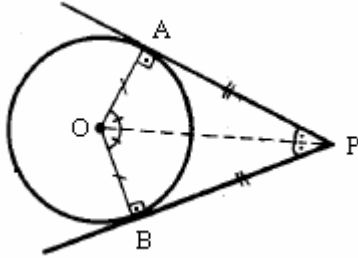
Not :

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

$$|PA| = |PB|$$



Not :



[OP] açıortaydır.

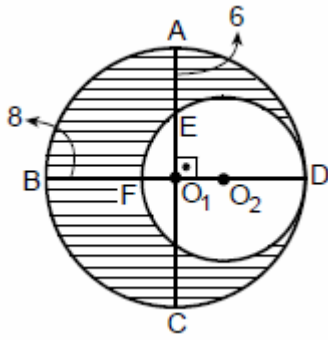
Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

16.



$$AC \perp BD$$

$$|AE| = 6 \text{ cm}$$

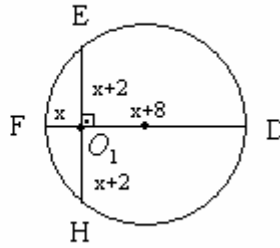
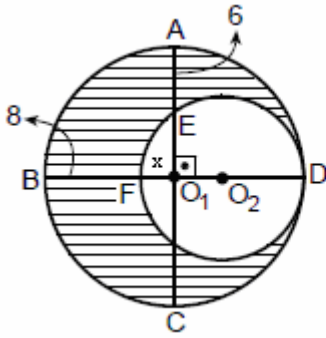
$$|BF| = 8 \text{ cm}$$

Şekildeki O_1 merkezli büyük çember ile O_2 merkezli küçük çember D noktasında içten teğettir.

Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

- A) 52π B) 54π C) 56π D) 58π E) 60π

Çözüm 16



$$|O_1F| = x \text{ olsun.}$$

$$O_1 \text{ merkezli büyük çemberin yarıçapı} = x + 8$$

$$|O_1E| = (x + 8) - 6 = x + 2$$

$$AC \perp BD \Rightarrow |EO_1| = |HO_1| = x + 2$$

$$\text{Çemberde kuvvet bağıntısına göre, } x \cdot (x + 8) = (x + 2) \cdot (x + 2) \Rightarrow x = 1$$

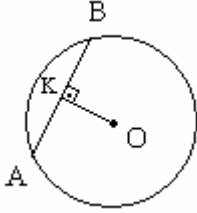
$$O_1 \text{ merkezli büyük çemberin yarıçapı} = x + 8 = 1 + 8 = 9$$

$$O_2 \text{ merkezli küçük çemberin yarıçapı} = \frac{x + (x + 8)}{2} = x + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$\text{Taralı alan} = \pi \cdot 9^2 - \pi \cdot 5^2 = 81\pi - 25\pi = 56\pi \text{ elde edilir.}$$

Not :

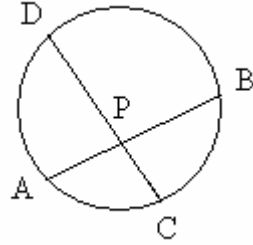
Merkez ile kirişin orta noktasını birleştiren doğru kirişe diktir.



$$|AK| = |KB| \Rightarrow [OK] \perp [AB]$$

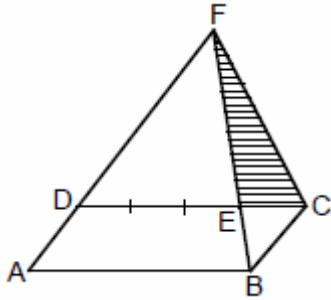
Not : Çemberde kuvvet bağıntıları

P noktası çemberin içinde ve biri çemberi A ve B noktalarında, diğeri C ve D noktalarında kesen, iki kesen çizilirse,



$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \text{ olur.}$$

17.



ABCD bir paralelkenar

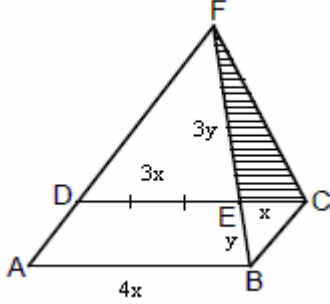
$$|EC| = \frac{1}{4} |DC|$$

Yukarıda verilen düzlemsel şekilde F noktası AD ve BE doğrularının kesim noktasıdır. FEC üçgeninin alanı 3 cm^2 olduğuna göre, ABCD paralelkenarının alanı kaç cm^2 dir?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm 17

$$|EC| = x \text{ olsun.} \Rightarrow |DC| = 4x \text{ olur.}$$



$$\text{ABCD bir paralelkenar olduğuna göre, } FDE \cong FAB \Rightarrow \frac{3x}{4x} = \frac{|FE|}{|FB|} \text{ ise}$$

$$|FE| = 3y \text{ olsun.} \Rightarrow |EB| = y \text{ olur.}$$

$$\text{alan}(FEC) = 3 \text{ ise}$$

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranına eşit olduğundan,

$$\frac{\text{alan}(BEC)}{\text{alan}(FEC)} = \frac{y}{3y} \Rightarrow \frac{\text{alan}(BEC)}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{alan}(BEC) = 1$$

$$\frac{\text{alan}(FDE)}{\text{alan}(FEC)} = \frac{3x}{x} \Rightarrow \frac{\text{alan}(FDE)}{3} = \frac{3}{1} \Rightarrow \text{alan}(FDE) = 9$$

Benzer iki üçgenin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşit olduğundan,

$$\frac{\text{alan}(FDE)}{\text{alan}(FAB)} = \left(\frac{3x}{4x}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{\text{alan}(FAB)} = \frac{9}{16} \Rightarrow \text{alan}(FAB) = 16$$

$$\text{alan}(ABCD) = \text{alan}(FAB) - \text{alan}(FDE) + \text{alan}(BEC)$$

$$\text{alan}(ABCD) = 16 - 9 + 1 = 8 \text{ elde edilir.}$$

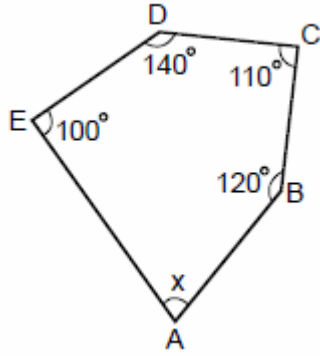
Not :

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranına eşittir.

Not :

Benzer iki üçgenin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

18.



ABCDE bir beşgen

$$m(\angle ABC) = 120^\circ$$

$$m(\angle BCD) = 110^\circ$$

$$m(\angle CDE) = 140^\circ$$

$$m(\angle DEA) = 100^\circ$$

$$m(\angle EAB) = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

- A) 85 B) 80 C) 75 D) 70 E) 65

Çözüm 18

Kenar sayısı = 5 ise

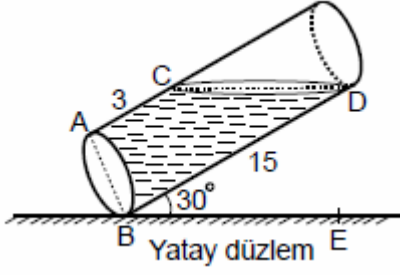
Çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı : $(5 - 2) \cdot 180 = 3 \cdot 180 = 540$

$$x + 120 + 110 + 140 + 100 = 540 \Rightarrow x + 470 = 540 \Rightarrow x = 70$$

Not :

n tane kenarı olan bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, $(n - 2) \cdot 180$ bağıntısı ile bulunur.

19.



$$m(\text{DBE}) = 30^\circ$$

$$|AC| = 3 \text{ cm}$$

$$|BD| = 15 \text{ cm}$$

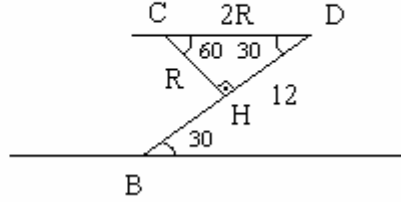
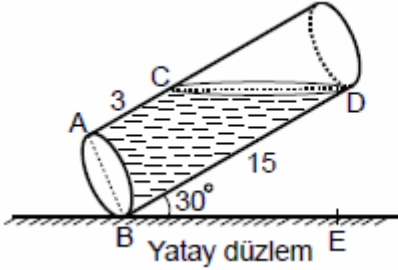
Dik dairesel silindir biçiminde tamamı suyla dolu olan bir bardak, yatay düzlemle 30° lik açı yapacak biçimde şekildeki gibi eğildiğinde bardaktan bir miktar su dökülüyor.

Bardakta kalan su C ve D noktalarında dengeleniyor.

Buna göre, bardaktan kaç cm^3 su dökülmüştür?

- A) 66π B) 68π C) 72π D) 74π E) 76π

Çözüm 19



Bardağın çapı = R olsun.

$$R = |CH| \text{ ve } |HD| = 15 - 3 = 12$$

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına eşit olduğuna göre, $|DC| = 2R$

$$(2R)^2 = R^2 + 12^2 \text{ (Pisagor)} \Rightarrow R = 4\sqrt{3}$$

Buna göre, bardağın yarıçapı = $r = 2\sqrt{3}$ olur.

Bardaktan dökülen su miktarı C noktasından sonraki kısmın yarısına eşit olduğuna göre,

Su döküldükten sonra bardakta kalan suyun yüksekliği = 12 ise

$$\text{Bardaktan dökülen su miktarı} = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 12}{2} = 72\pi \text{ cm}^3$$

Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

20. K_1 ve K_2 dairesel konilerinin taban yarıçapları sırasıyla r_1 , r_2 birim, yükseklikleri h_1 , h_2 birim ve hacimleri V_1 , V_2 birim küptür.

$\frac{r_1}{r_2} = a$ ve $\frac{h_1}{h_2} = b$ olduğuna göre, $\frac{V_1}{V_2}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{a^2}{b}$ C) ab^2 D) a^2b E) a^2b^2

Çözüm 20

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 \cdot h_1}{r_2^2 \cdot h_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow$$

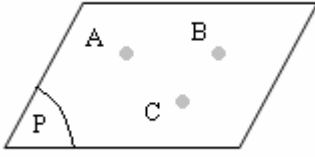
$$\frac{r_1}{r_2} = a \text{ ve } \frac{h_1}{h_2} = b \text{ olduğuna göre, } \frac{V_1}{V_2} = a^2b$$

21. Aşağıdakilerden hangisi bir düzlem belirtmez?

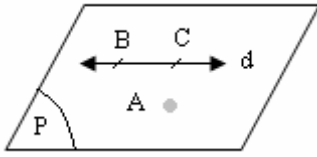
- A) Doğrusal olmayan üç nokta
B) Bir doğru ile dışındaki bir nokta
C) Aykırı iki doğru
D) Paralel iki farklı doğru
E) Kesişen iki farklı doğru

Çözüm 21

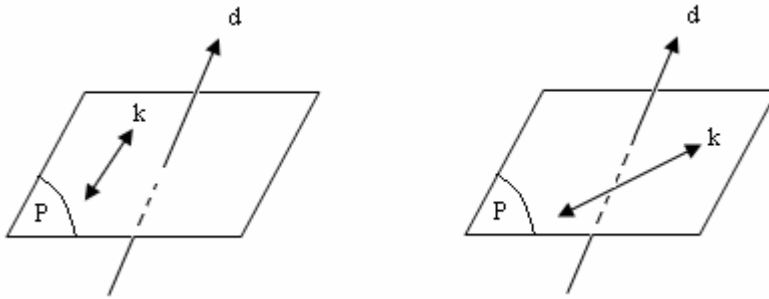
A) Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.



B) Bir doğru ile dışındaki bir nokta bir düzlem belirtir.



C) Aykırı iki doğru

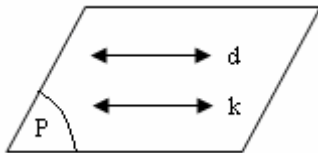


Aykırı doğrular : Farklı düzlemlerde bulunan ve kesişmeyen doğrulardır.

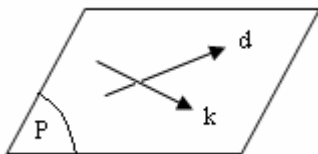
$$\left. \begin{array}{l} k \subset P \\ d \not\subset P \end{array} \right\} \text{ ve } k \cap d = \emptyset \Rightarrow k \text{ ve } d \text{ aykırı doğrulardır.}$$

Buna göre, aykırı iki doğru düzlem belirtmez.

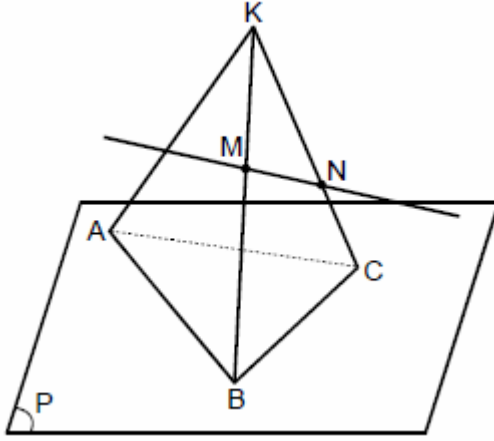
D) Paralel iki farklı doğru bir düzlem belirtir.



E) Kesişen iki farklı doğru bir düzlem belirtir.



22.



P düzlemi üzerinde bir ABC üçgeni ve bu düzlemin dışında bir K noktası alınıyor.

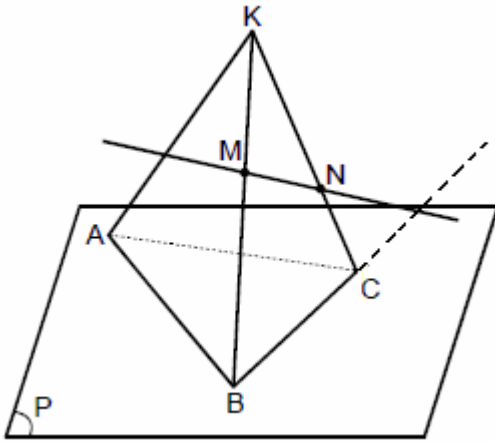
A, B, C noktaları K noktası ile birleştiriliyor.

[KB] ve [KC] üzerinde K, B ve C'den farklı olacak şekilde M ve N noktaları işaretleniyor ve MN doğrusu çiziliyor.

MN doğrusunun P düzlemini kestiği bilindiğine göre, kesim noktası neresidir?

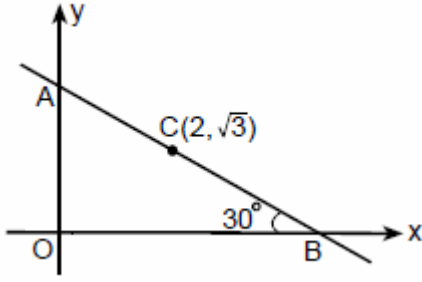
- A) AB doğrusu üzerinde bir nokta
- B) AC doğrusu üzerinde bir nokta
- C) AK doğrusu üzerinde bir nokta
- D) BC doğrusu üzerinde bir nokta
- E) ABC üçgeninin ağırlık merkezi

Çözüm 22



BKC üçgeni ile düzlemin kesişimi olan BC doğrusu üzerinde bir noktada kesişirler.

23.

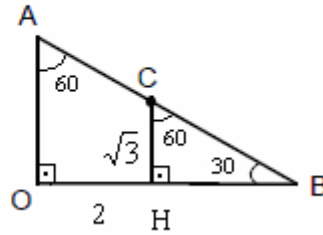
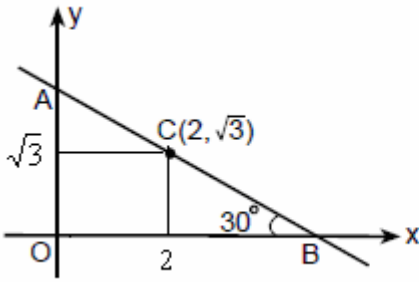


Dik koordinat düzleminde verilen şekildeki AOB üçgeninin alanı kaç birim karedir?

- A) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{25\sqrt{2}}{6}$ E) $\frac{25\sqrt{3}}{6}$

Çözüm 23

I. Yol

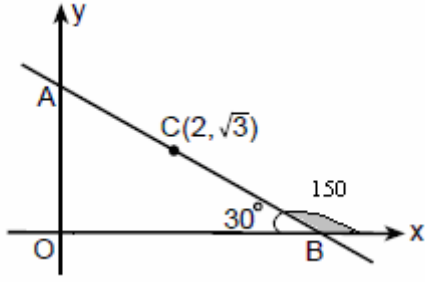


BHC dik üçgeninde, $|CH| = \sqrt{3}$ ise $|BC| = 2\sqrt{3}$ ve $|BH| = 3$ olur.

$$BHC \cong BOA \Rightarrow \frac{3}{3+2} = \frac{\sqrt{3}}{|AO|} \Rightarrow |AO| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{alan}(AOB) = \frac{|AO||OB|}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot 5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{6} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol



$$C(2, \sqrt{3}) \text{ ve } AB \text{ doğrusunun eğimi} = m = \tan(180 - 30) = \tan 150 = -\tan 30 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

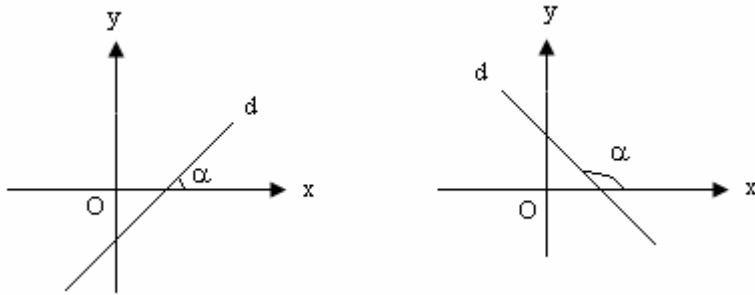
$$\text{Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemi : } y - \sqrt{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \frac{5-x}{\sqrt{3}}$$

$$x = 0 \text{ için } y = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow (0, \frac{5}{\sqrt{3}}) \Rightarrow |OA| = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$y = 0 \text{ için } x = 5 \Rightarrow (5, 0) \Rightarrow |OB| = 5$$

$$\text{alan(AOB)} = \frac{|AO| \cdot |OB|}{2} = \frac{\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 5}{2} = \frac{25}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \text{alan(AOB)} = \frac{25\sqrt{3}}{6}$$

Not :



Şekildeki α açısına d doğrusunun eğim açısı, “ $\tan\alpha$ ” ya bu doğrunun eğimi denir.

$$0 < \alpha < 90 \Rightarrow m = \tan\alpha > 0$$

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow m = \tan\alpha < 0$$

Uyarı : Bir doğrunun x ekseninin pozitif tarafı ile yaptığı açıya eğim açısı ve eğim açısının tanjantına da eğim denir.

Not : Dik üçgen özellikleri

Bir dar açının ölçüsü 30° olan dik üçgende,

30° karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüsün yarısına ,

60° karşısındaki kenar uzunluğu hipotenüsün $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katına eşittir.

Not : Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemi

$$A(x_1, y_1) \text{ ve eğim : } m \Rightarrow m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m.(x - x_1)$$

24. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$ çemberinin 12 birim uzunluğundaki kirişlerinin orta noktalarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 64$

B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 64$

C) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 64$

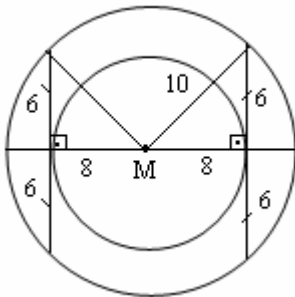
D) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 36$

E) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 81$

Çözüm 24

I. Yol

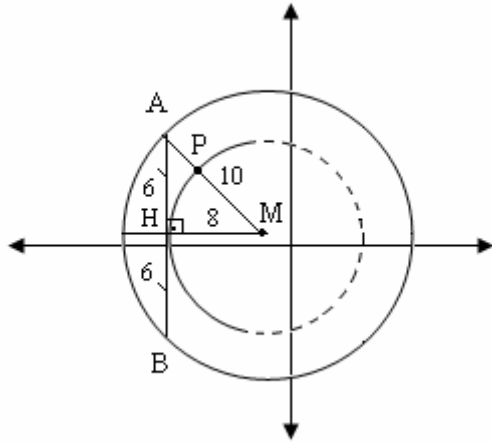
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100 \Rightarrow \text{Çemberin merkezi} = M(-2, 1) \text{ ve yarıçapı} = r = 10$$



Aynı merkeze 8 birim uzaklıktaki noktalar kümesidir.

$$\text{Çemberin merkezi} = M(-2, 1) \text{ ve yarıçapı} = r = 8 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 64$$

II. Yol



$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100 \Rightarrow \text{Çemberin merkezi} = M(-2, 1) \text{ ve yarıçapı} = r = 10$$

Çemberin kirişi $[AB]$ olsun.

$$|AB| = 12 \text{ ise orta noktalarının uzunlukları} = |AH| = |BH| = 6$$

Merkez ile kirişin orta noktasını birleştiren doğru kirişe dik olduğuna göre,

$$|AH| = |HB| \Rightarrow [MH] \perp [AB]$$

AHM dik üçgeninde, $|AH| = 6$ ve $|MA| = 10$ ise $|MH| = 8$ (pisagor)

Geometrik yere ait bir nokta $P(x, y)$ olsun.

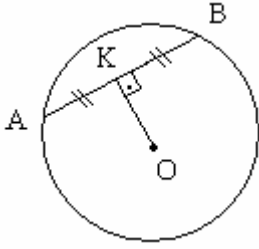
$$|PM| = |MH| \text{ ise}$$

İki nokta arası uzaklığa göre, $P(x, y)$ ve $M(-2, 1)$

$$\sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 1)^2} = 8$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 64 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 64 \text{ elde edilir.}$$

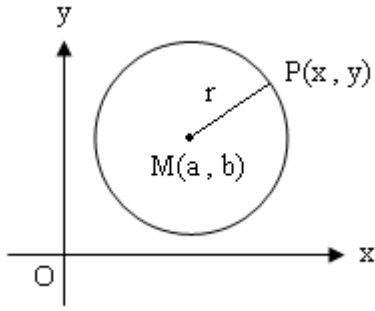
Not : Merkez ile kirişin orta noktasını birleştiren doğru kirişe diktir.



$$|AK| = |KB| \Rightarrow [OK] \perp [AB]$$

Not : Çemberin Denklemi

Koordinat düzleminde sabit $M(a, b)$ noktasından r uzaklıkta bulunan noktaların kümesi $M(a, b)$ merkezli r yarıçaplı çember belirtir.



Çemberin denklemi çember üzerindeki noktaların apsisleri ile ordinatları arasındaki bağıntıdır.

$$r = |MP| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Öyleyse

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r olan çemberin denklemi : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir.

Not : Geometrik Yer

Aynı özelliği taşıyan noktaların meydana getirdikleri şekil, bu noktaların geometrik yeridir.

Analitik olarak geometrik yer aramak için bu noktaların ortak özelliğini belirten şeklin denklemini bulmak gerekir.

25. p bir parametre olmak üzere, denklemleri

$$(3p + 2)x + (p + 1)y + p - 1 = 0$$

olan doğruların ortak noktası olan K'nin koordinatlarının toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm 25

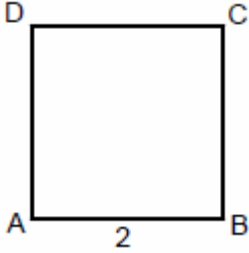
$$p = -1 \text{ için, } (3(-1) + 2)x + (-1 + 1)y + (-1) - 1 = 0 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

$$p = 0 \text{ için, } (3 \cdot 0 + 2)x + (0 + 1)y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ ise } y = 5$$

Buna göre, $x + y = -2 + 5 = 3$ elde edilir.

26.



ABCD bir kare

$$|AB| = 12 \text{ birim}$$

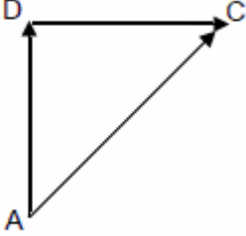
Yukarıdaki şekle göre, $\langle \vec{AB}, \vec{AD} + \vec{DC} \rangle$ iç çarpımının değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

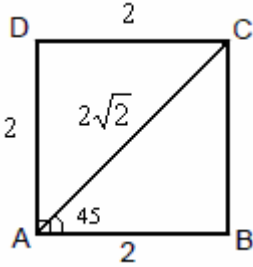
Çözüm 26

$$\langle \vec{AB}, \vec{AD} + \vec{DC} \rangle = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD} + \vec{DC}| \cdot \cos 45$$

$$\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$$

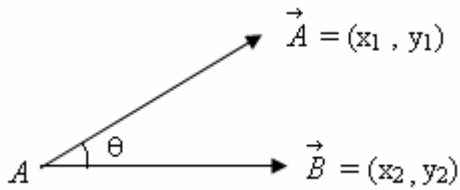


$$|\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$



$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos 45 = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ bulunur.}$$

Not : İç (skaler) Çarpım



Sıfırdan farklı $\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri arasındaki açı θ ise

$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$ gerçel sayısına \vec{A} ve \vec{B} vektörlerinin iç (skaler) çarpımı denir ve

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ ya da $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ biçiminde gösterilir.

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

27. Uzayda $A(-2, 3, 1)$ ve $B(4, 1, 2)$ noktaları ile $\vec{u} = (5, -3, 7)$ vektörü veriliyor.

Buna göre, $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \vec{u}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{w} = (1, -1, -3)$ B) $\vec{w} = (1, 1, -6)$ C) $\vec{w} = (5, 1, 10)$

D) $\vec{w} = (7, 2, -3)$ E) $\vec{w} = (8, 1, 10)$

Çözüm 27

$$A(-2, 3, 1) \text{ ve } B(4, 1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4 - (-2), 1 - 3, 2 - 1) = (6, -2, 1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \vec{u}$$

$$\vec{w} = (6, -2, 1) - (5, -3, 7) = (6 - 5, -2 - (-3), 1 - 7) = (1, 1, -6)$$

Not : $\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri için \overrightarrow{AB} vektörünü bulmak için, bitim noktasının koordinatlarından başlangıç noktasının koordinatları çıkarılır.

Buna göre, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Not : Vektörlerin Toplamı

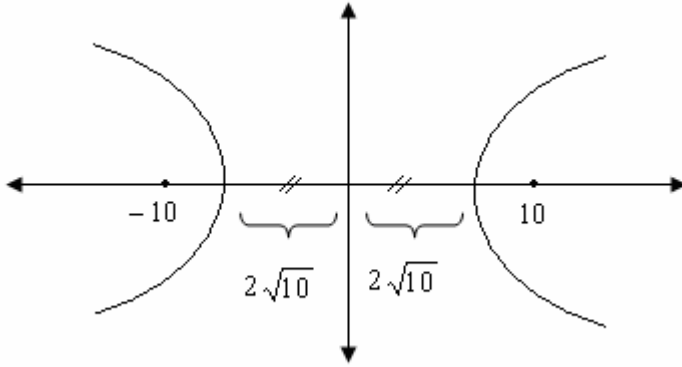
$$\vec{A} = (x_1, y_1) , \vec{B} = (x_2, y_2) \text{ vektörleri için } \vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

28. $(-10, 0)$ ve $(10, 0)$ noktalarına uzaklıkları farkı $4\sqrt{10}$ olan noktaların geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x^2 - 3y^2 = 40$ B) $2x^2 + 3y^2 = 80$ C) $2x^2 - 3y^2 = 80$
D) $3x^2 + 2y^2 = 120$ E) $3x^2 - 2y^2 = 120$

Çözüm 28

I. Yol



Verilenlere göre, geometrik yerinin denklemi hiperbol denklemi olur.

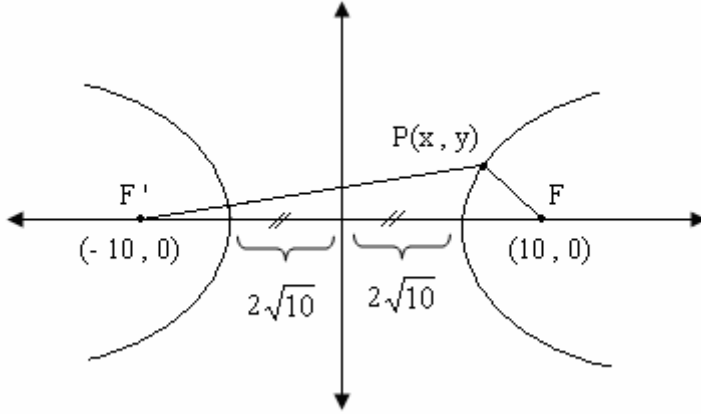
$$\text{Odakları : } (-10, 0) \text{ ve } (10, 0) \Rightarrow c = 10$$

$$\text{Uzaklıkları farkı} = 4\sqrt{10} \Rightarrow 2a = 4\sqrt{10} \Rightarrow a = 2\sqrt{10}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 10^2 = (2\sqrt{10})^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 40 \Rightarrow b^2 = 60$$

$$\text{Hiperbolün denklemi : } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ olduğuna göre, } \frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{60} = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 120$$

II. Yol



Noktalar $P(x, y)$ olsun.

Hiperbol tanımına göre, $|PF'| - |PF| = 2a$

İki nokta arası uzaklık formülünden,

$$\sqrt{(x - (-10))^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - 10)^2 + (y - 0)^2} = 4\sqrt{10}$$

$$\sqrt{(x + 10)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} = 4\sqrt{10}$$

$$\sqrt{(x + 10)^2 + y^2} = 4\sqrt{10} + \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} \text{ karesi alınırsa,}$$

$$(x + 10)^2 + y^2 = 160 + 8\sqrt{10} \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} + (x - 10)^2 + y^2$$

$$20x = 160 + 8\sqrt{10} \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} - 20x$$

$$40x - 160 = 8\sqrt{10} \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} \Rightarrow 5x - 20 = \sqrt{10} \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} \text{ karesi alınırsa,}$$

$$25x^2 - 200x + 400 = 10((x - 10)^2 + y^2)$$

$$5x^2 - 40x + 80 = 2(x^2 - 20x + 100 + y^2)$$

$$5x^2 - 40x + 80 = 2x^2 - 40x + 200 + 2y^2 \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 120$$

Not : Hiperbol

Bir düzlemde, sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit olan noktaların geometrik yerine hiperbol denir.

Sabit iki noktaya hiperbolün odakları denir.

29. $y^2 = -4x$ parabolünün $x = 2$ doğrusuna göre simetriğinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y^2 = 4x$ B) $y^2 = -4(x - 2)$ C) $y^2 = -4(x + 4)$
D) $y^2 = 2(x - 4)$ E) $y^2 = 4(x - 4)$

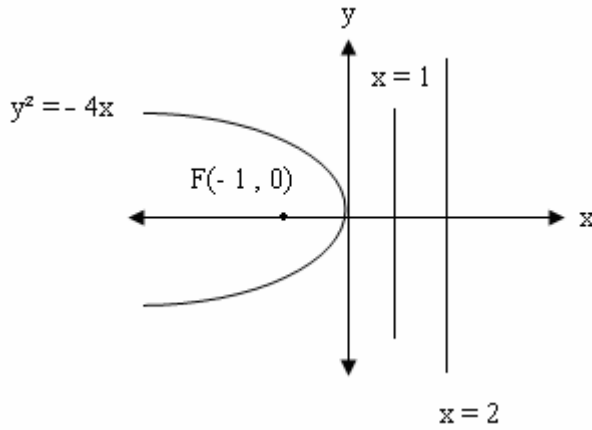
Çözüm 29

I. Yol

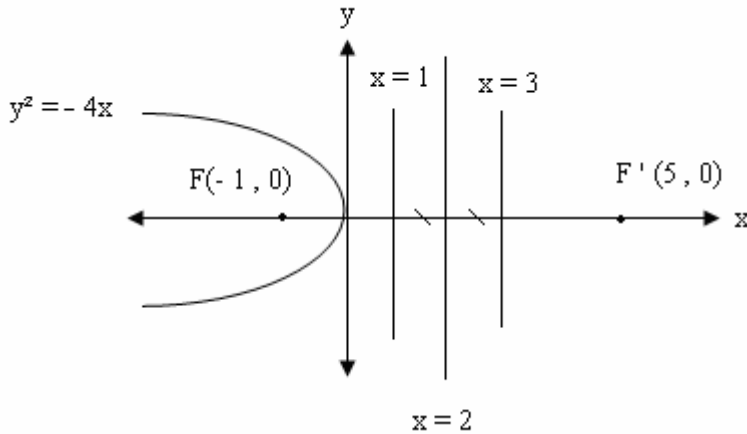
$$y^2 = -4x \Rightarrow -2p = -4 \Rightarrow p = 2 \text{ olduğuna göre,}$$

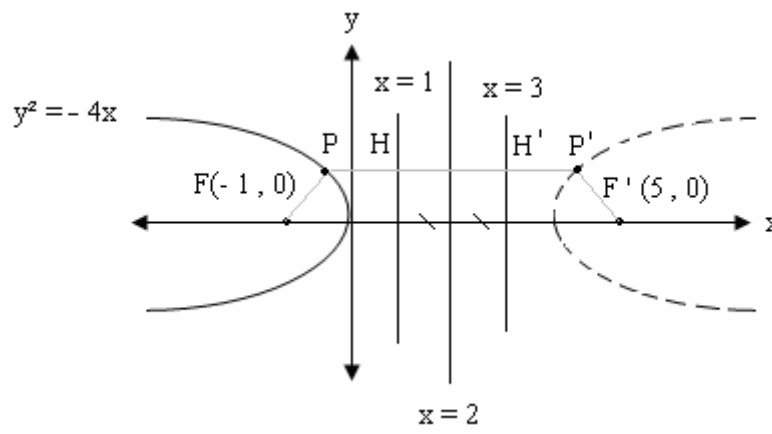
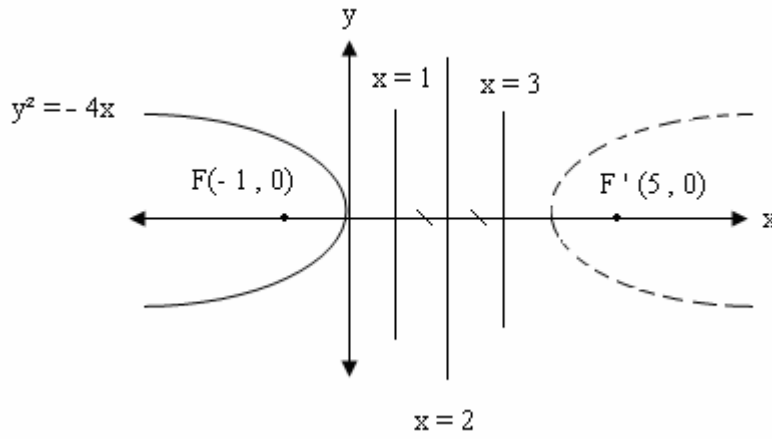
$$y^2 = -4x \text{ parabolünün odağı : } F\left(-\frac{p}{2}, 0\right) = F\left(-\frac{2}{2}, 0\right) = F(-1, 0)$$

ve doğrultman vektörü : $x = \frac{p}{2} = 1$ ise



$x = 2$ doğrusuna göre simetriği,





$F(-1, 0)$ noktasının $x = 2$ doğrusuna göre simetriği, $F'(5, 0)$ olacağına göre,

Odağı $F'(5, 0)$ ve doğrultman vektörü $x = 3$ olan parabolün denklemi :

$P'(x, y)$ noktasının odağa olan uzaklığı :

$$|P'F'| = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow |P'F'| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

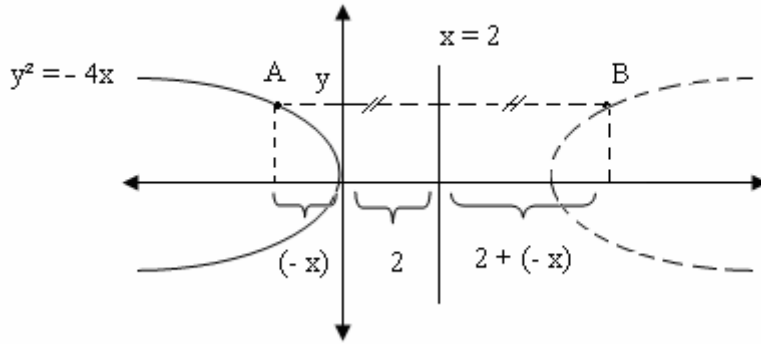
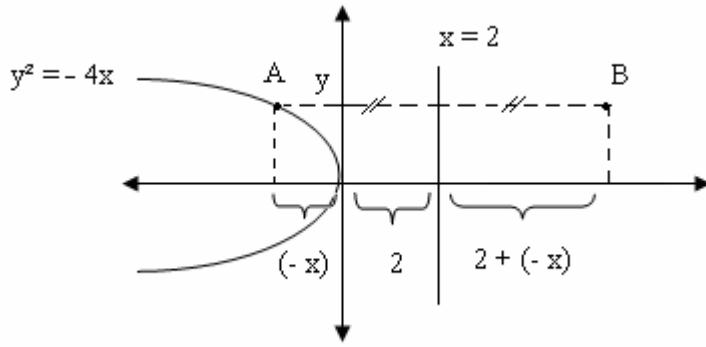
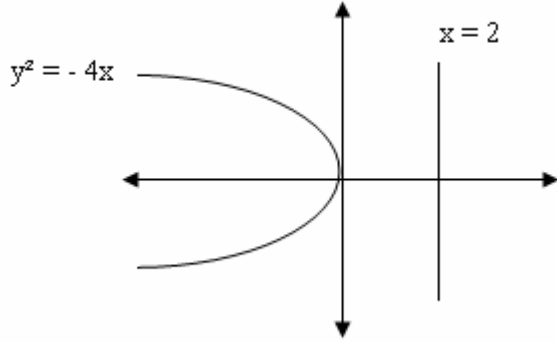
Doğrultmana olan uzaklığı : $|P'H'| = x - 3$

Parabol tanımından, $|P'F'| = |P'H'|$ olacağından,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = x - 3 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = (x-3)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow y^2 = 4x - 16 \Rightarrow y^2 = 4(x - 4)$$

II. Yol



$y^2 = -4x$ parabolünün üzerindeki $A(x, y)$ noktasının $x = 2$ doğrusuna göre simetriği,

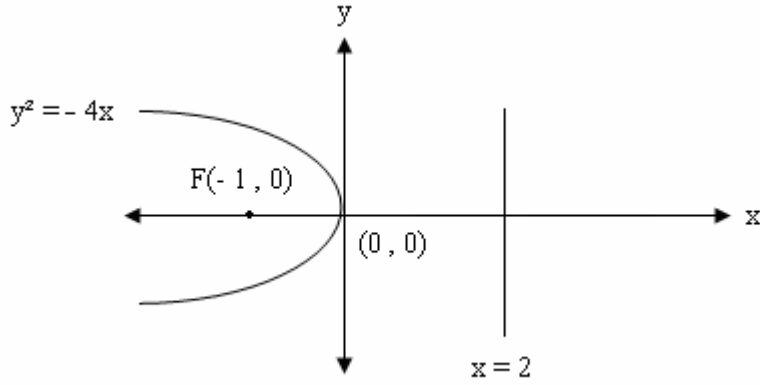
$x < 0$ için

$$B(2 + (2 - x), y) = B(4 - x, y)$$

B noktası parabolün denklemini sağlayacağına göre,

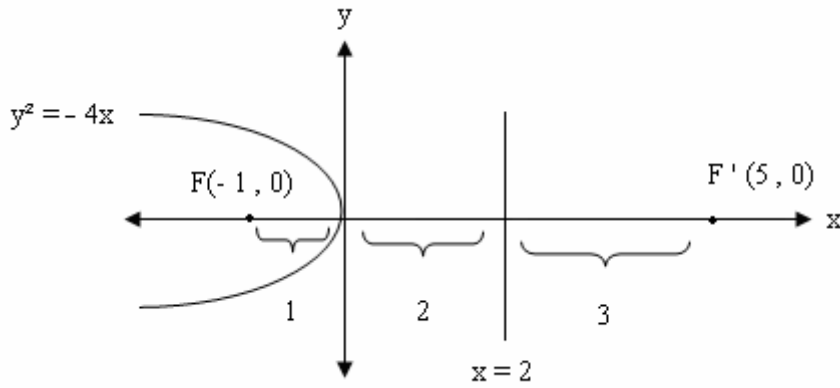
$$y^2 = -4x \Rightarrow y^2 = -4(4 - x) \Rightarrow y^2 = 4(x - 4)$$

III. Yol



$$y^2 = -4x \Rightarrow -2p = -4 \Rightarrow p = 2 \text{ olduğuna göre,}$$

$$y^2 = -4x \text{ parabolünün odağı : } F\left(-\frac{2}{2}, 0\right) = F(-1, 0)$$



$F(-1, 0)$ noktasının $x = 2$ doğrusuna göre simetriği, $F'(5, 0)$ olacağına göre,

Ekseni Koordinat Eksenlerine Paralel Olan Parabolün Denkleminden,

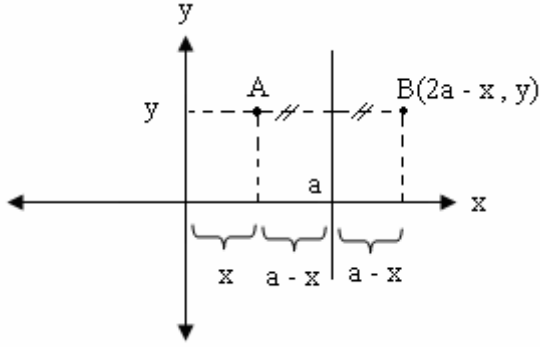
$$\text{Odağı : } F'\left(h + \frac{p}{2}, k\right) = F'(5, 0) \Rightarrow h + 1 = 5 \Rightarrow h = 4, k = 0$$

$$\text{Doğrultman denklemi : } x = 4 - 1 = 3$$

Köşesi $A(h, k) = A(4, 0)$, ekseni Ox – eksenine paralel olan ve doğrultmanın sağında bulunan parabolün denklemine göre,

$$(y - k)^2 = 2p(x - h) \Rightarrow (y - 0)^2 = 2.2(x - 4) \Rightarrow y^2 = 4(x - 4)$$

Not : $x = a$ doğrusuna göre simetri



B noktasının apsisi = $a + a - x = 2a - x$

$A(x, y)$ noktasının $x = a$ doğrusuna göre simetriği $B(2a - x, y)$ dir.

Not : Parabolün Analitik İncelemesi

Bir düzlemde, sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yerine parabol denir.

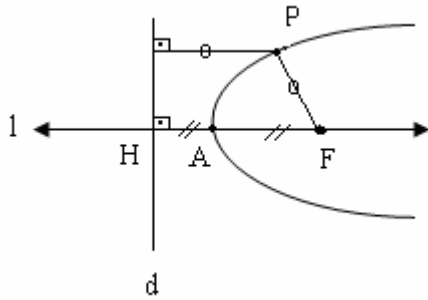
Sabit noktaya parabolün odağı,

Sabit doğruya parabolün doğrultmanı,

Parabolün doğrultmana en yakın olan noktasına parabolün köşesi,

Odaktan geçen ve doğrultmana dik olan doğruya parabolün ekseni,

Odağın doğrultmana olan uzaklığına da parabolün parametresi denir.



Yukarıdaki şekilde

F – odak

d – doğrultman

l – eksen

A – tepe noktası

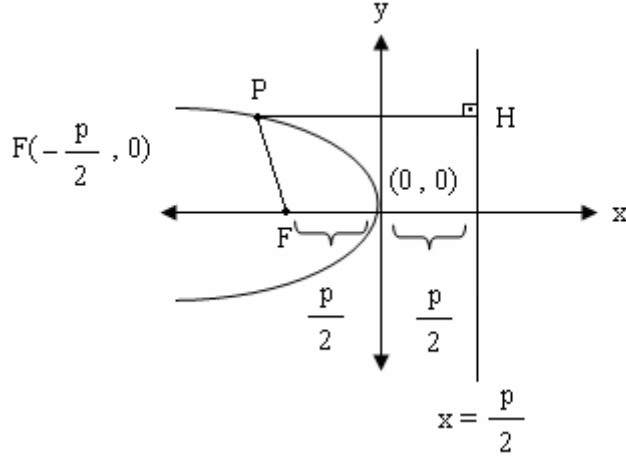
$|AH| = |AF|$ olduğundan tepe noktası F den doğrultmana indirilen dikmenin orta noktasıdır.

$|FH|$ uzunluğu parabolün parametresidir. p ile gösterilir. Buna göre, $|FH| = p$ dir.

Not :

Tepe noktası $O(0, 0)$ ve odağı koordinat eksenleri üzerinde bulunan parabolün denklemi

Odağı $F(-\frac{p}{2}, 0)$ ve doğrultmanı $x = \frac{p}{2}$ olan parabolün denklemi,



P noktasının odağa olan uzaklığı : $|PF|$

Odağı : $F(-\frac{p}{2}, 0)$ olduğuna göre,

$$|PF| = \sqrt{\left(-x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow |PF| = \sqrt{\left(-x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Doğrultmana olan uzaklığı : $|PH| = -x + \frac{p}{2}$

$|PF| = |PH|$ olacağından,

$$\sqrt{\left(-x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = -x + \frac{p}{2} \Rightarrow \left(-x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(-x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = -2px$$

Buna göre, odağı doğrultmanından p kadar uzakta olan parabolün denklemi : $y^2 = -2px$ olur.

Simetri eksenini Ox - eksenidir.

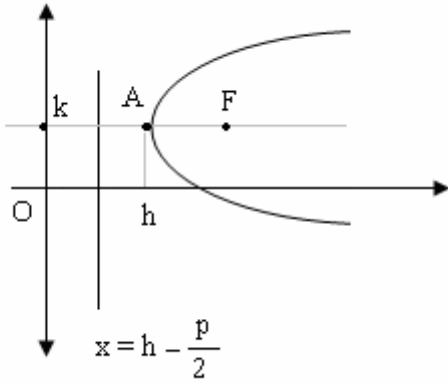
Not : Ekseni Koordinat Eksenlerine Paralel Olan Parabolün Denklemi

Köşesi $A(h, k)$, ekseni Ox – eksenine paralel olan ve doğrultmanının sağında bulunan parabolün denklemi :

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Odağı : $F(h + \frac{p}{2}, k)$

Doğrultman denklemi : $x = h - \frac{p}{2}$ dir.



Burada p parametresi odakla doğrultman arasındaki uzaklığı gösteren bir pozitif sayıdır.

30. Uzayda $\frac{x}{p} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$ doğrusu

$3x + (p + 1).y + 2z - 5 = 0$ düzlemine paralel olduğuna göre, p kaçtır?

- A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

Çözüm 30

$$\frac{x}{p} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4} \text{ doğrusunun doğrultman vektörü : } \vec{v} = (p, 2, 4)$$

$$3x + (p+1)y + 2z - 5 = 0 \text{ düzleminin normali : } \vec{n} = (3, (p+1), 2)$$

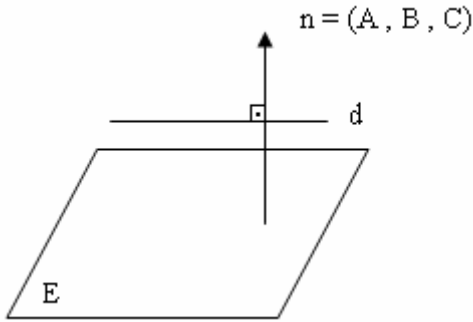
Doğrunun düzleme paralel olması için, $\vec{v} \perp \vec{n}$ olmalıdır.

İki vektör dik olduğunda iç çarpımları sıfır olacağından,

$$\vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow p \cdot 3 + 2 \cdot (p+1) + 4 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3p + 2p + 2 + 8 = 0 \Rightarrow 5p = -10 \Rightarrow p = -2 \text{ bulunur.}$$

Not : Bir doğru ile bir düzlemin paralel olma şartı



$$d : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ doğrusu } E : Ax + By + Cz + D = 0 \text{ düzlemine paralel olsun.}$$

Bu durumda düzlemin $\vec{n} = (A, B, C)$ normali ile doğrunun $\vec{v} = (a, b, c)$ doğrultman vektörü birbirine dik olurlar.

Dolayısıyla öklid iç çarpımları sıfırdır.

$$\text{Buna göre, } d // E \Leftrightarrow a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0 \text{ bulunur.}$$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA